

MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

AMSTERDAM

AFD. TOEGEPASTE WISKUNDE

Overzicht van de door de Afdeling Toegepaste  
Wiskunde ontwikkelde theorie met betrekking tot:

HET NIVEAU VAN EEN ZEE MET CONSTATE, OF OP STUKKEN CON-  
STANTE DIEPTE ONDER INVLOED VAN STATIONAIRE WINDVELDEN.

T.C.Braakman.

Rapport TW 27.

Februari

1954.



Overzicht van de door de Afdeling Toegepaste Wiskunde ontwikkelde theorie met betrekking tot:

Het niveau van een zee met constante, of op stukken constante, diepte, onder invloed van stationaire windvelden.

## 1. Inleiding.

In het kader van het onderzoek, dat door de afdeling Toegepaste Wiskunde van het Mathematisch Centrum wordt verricht ten behoeve van de bepaling van het effect van windkrachten op een zee, is in de eerste plaats het speciale geval beschouwd van stationaire windvelden. De verrichte studies zijn door Veltkamp uitvoerig weergegeven in een drietal rapporten [1],[2] en [3], doch in dit rapport stellen we ons ten doel een overzicht te geven van de belangrijkste der aldaar verkregen resultaten zonder berekeningen, bewijzen e.d.. Voor uitvoeriger mathematische formuleringen en berekeningen zij dus steeds verwezen naar de bovengenoemde rapporten, die we in den vervolge zullen aanduiden met TW 22, TW 23, TW 24.

Onder windeffect, resp. driftstroming verstaan we de verhoging van de zeespiegel, resp. de stroming, die het gevolg is van windkrachten langs het oppervlak. We beschouwen dus geen andere effecten, zoals die afkomstig zijn van getijden, temperatuurs- of soortelijk gewichtsverschillen, barometrische druk e.d..

De gehele theorie is gebaseerd op de door Schalkwijk [4] gegeven differentiaalvergelijkingen voor de stationaire stroming van een zee onder invloed van tangentiële windkrachten, zwaartekracht en Coriolis-kracht. Deze differentiaalvergelijkingen worden hier niet gediscussieerd.

Wat betreft de windkrachten, wordt steeds aangenomen, dat niet de windsterkte zelf, maar de tangentiële kracht, die de wind op het zeeoppervlak uitoefent, gegeven is. Het veld van deze tangentiële krachten duiden we echter steeds, hoewel enigszins onjuist, aan met de term windveld.

Dit overzicht valt uiteen in twee delen; in deel I zullen we het geval beschouwen dat de zee overal even diep is, (dit is behandeld in TW 23), terwijl in deel II wordt verondersteld, dat de zee bestaat uit verschillende stukken, elk met constante, maar onderling verschillende diepte (dit correspondeert met TW 24).



Deel I. Stationaire windvelden boven een zee van constante diepte.

2. De vergelijkingen van Schalkwijk; invoering van potentialen.

Zoals in 1. reeds is aangekondigd, gaan we uit van de door Schalkwijk afgeleide differentiaalvergelijkingen (zie [4], formule (11) en (12)), welke luiden:

$$1S = \frac{\frac{W}{\rho} + gH\gamma}{1 + \frac{1}{4h}} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial y} = 0 \quad (2.2)$$

De in deze vergelijkingen gebruikte notatie is dezelfde als die van Schalkwijk, nl.:

$\zeta(x,y)$  is de verhoging van de zeespiegel in het punt  $(x,y)$  ten opzichte van de ongestoorde toestand, als gevolg van het windveld (het windeffect)

$i$  is de imaginaire eenheid

$$S = S_1 + i S_2; W = W_1 + i W_2, \gamma = \gamma_1 + i \gamma_2$$

$S_1(x,y)$  resp.  $S_2(x,y)$  is de  $x$ - resp.  $y$ -component van de "totale stroom" in het punt  $(x,y)$ . (Onder de "totale stroom" verstaan we de integraal van de door het windveld veroorzaakte horizontale stroomsnelheid, genomen langs een verticaal van bodem tot oppervlak).

$W_1(x,y)$  resp.  $W_2(x,y)$  is de  $x$ - resp.  $y$ -component van het windveld in het punt  $(x,y)$ . (Zoals in 1. reeds is opgemerkt, verstaan we onder windveld de door de wind veroorzaakte schuifspanning aan het oppervlak).

$$\gamma_1(x,y) = \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \gamma_2(x,y) = \frac{\partial \zeta}{\partial y}.$$

$1 = 2 \omega \sin \varphi$ , waarin:

$\omega$  is de hoeksnelheid van de aarde

$\varphi$  is de gemiddelde geographische breedte van de beschouwde zee

$$h = \frac{\pi H}{D} \text{ met:}$$

$H$  is de diepte van de zee in de rusttoestand (in deel I is  $H$  dus constant)

$D = \pi \sqrt{\frac{2\mu}{\rho I}}$ : de "wrijvingsdiepte" van Ekman (constant aangenomen)

$\mu$  is de virtuele viscositeitscoëfficiënt van het zeewater

$\rho$  is de dichtheid van het zeewater (constant verondersteld)

$g$  is de versnelling van de zwaartekracht.

We zien af van de kromming van het aardoppervlak en nemen dus aan, dat de ongestoorde zeespiegel zich in een plat vlak bevindt. Hierin leggen we de  $x$ - en  $y$ -as. Voorts duiden we het gebied in het  $x,y$ -vlak, dat door het zeeoppervlak wordt ingenomen, steeds aan met  $G$ .



Ter vereenvoudiging voeren we de grootheid  $\lambda = \frac{1}{4h} = \frac{D}{4\pi H}$  in. In deel I is  $\lambda$  dus steeds constant. Wanneer we nu (2.1) splitsen in reëel en imaginair deel, vinden we:

$$-1 S_2 + \lambda 1 S_1 = \frac{W_1}{\rho} - g H \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (2.3)$$

$$1 S_1 + \lambda 1 S_2 = \frac{W_2}{\rho} - g H \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (2.4)$$

Uit (2.2), (2.3) en (2.4) moeten derhalve de onbekende functies  $\zeta(x,y)$ ,  $S_1(x,y)$  en  $S_2(x,y)$  worden opgelost.

Teneinde dit probleem te vereenvoudigen, voeren we enige nieuwe grootheden in:

1°. We voeren de functies  $U(x,y)$  en  $V(x,y)$  in, die we de windpotentialen noemen, en die we met behulp van de volgende relaties bepalen:

$$W_1 = - \frac{\rho g D}{4\pi} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (2.5)$$

$$W_2 = - \frac{\rho g D}{4\pi} \left( - \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \quad (2.6)$$

De functies  $U$  en  $V$  karakteriseren het windveld en kunnen bepaald worden uit gegeven  $W_1$  en  $W_2$ .

Uit (2.5) en (2.6) is met partiële differentiatie direct af te leiden, dat

$$\Delta U = - \frac{4\pi}{\rho g D} \left( \frac{\partial W_1}{\partial y} - \frac{\partial W_2}{\partial x} \right) \quad (2.7)$$

$$\Delta V = - \frac{4\pi}{\rho g D} \left( \frac{\partial W_1}{\partial x} + \frac{\partial W_2}{\partial y} \right) \quad (2.8)$$

(Hierin is  $\Delta$  de operator van Laplace voor 2 variabelen:  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ).

Hieruit blijkt de betekenis van  $U$  en  $V$ . Beschouwen we het windveld nl. als een vectorveld, dan stellen de rechterleden van (2.7) en (2.8) op een constante factor na, resp. de rotatie en de divergentie van dit vectorveld voor. Voor een rotatie-vrij windveld moet derhalve gelden:  $\Delta U = 0$ , terwijl voor een divergentie-vrij windveld  $\Delta V = 0$  moet zijn. Deze benamingen ter onderscheiding van verschillende typen van windvelden zullen dikwijls worden gebruikt. In TW 23 en TW 24 is de gehele theorie behandeld met behulp van het formalisme der vectoranalyse.

2°. We voeren voorts op grond van (2.2) de functie  $\Theta(x,y)$  in, die we de stroomfunctie noemen en die bepaald wordt met behulp van de relaties:

$$S_1 = - \frac{g D}{4\pi I} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \quad (2.9)$$

$$S_2 = \frac{g D}{4\pi I} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \quad (2.10)$$



Dat de benaming stroomfunctie terecht is, blijkt in 3.

Door de invoering van  $\Theta$  volgens (2.9) en (2.10) is aan (2.2) steeds voldaan.

Substitueren we de nieuwe grootheden in (2.3) en (2.4), dan levert een kleine herleiding het volgende resultaat:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\lambda \Theta - U) = \frac{\partial}{\partial y} (\Theta - V - \frac{1}{\lambda} \zeta) \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\lambda \Theta - U) = - \frac{\partial}{\partial x} (\Theta - V - \frac{1}{\lambda} \zeta) . \quad (2.12)$$

Stellen we nu ter afkorting

$$\Phi(x, y) = \lambda \Theta - U \quad (2.13)$$

$$\text{en } \Psi(x, y) = \Theta - V - \frac{1}{\lambda} \zeta, \quad (2.14)$$

dan volgt uit (2.11) en (2.12), dat  $\Phi$  en  $\Psi$  voldoen aan de differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann. Dit impliceert volgens een zeer bekende stelling, dat  $\Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$  een analytische functie is van de complexe variabele  $z = x + iy$ . Deze functie, die we met  $\Omega(z)$  aanduiden, noemen we de complexe potentiaal.

$$\text{We hebben dus: } \Omega(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) \quad (2.15)$$

Uit (2.13) en (2.14) kunnen we  $\Theta$  en  $\zeta$  oplossen, wat levert:

$$\Theta = \frac{1}{\lambda} (\Phi + U) \quad (2.16)$$

$$\zeta = \Phi + U - \lambda(\Psi + V). \quad (2.17)$$

Met behulp van (2.15) kunnen we dit ook als volgt formuleren:

$$\Theta = \frac{1}{\lambda} \operatorname{Re} (\Omega + U + iV) \quad (2.18)$$

$$\zeta = \operatorname{Re} \left\{ (1 + i\lambda)(\Omega + U + iV) \right\} \quad (2.19)$$

waarin we met "Re" het reële deel aanduiden.

Uit deze laatste vergelijkingen blijkt, dat de fysische grootheden  $S_1(x, y)$ ,  $S_2(x, y)$  en  $\zeta(x, y)$  zijn bepaald, wanneer we de analytische functie  $\Omega(z)$  kennen.

### 3. Randvoorwaarde; eenduidigheid van de oplossingen.

Ons probleem is thans gereduceerd tot de bepaling van de functie  $\Omega(z)$ . Uitsluitend door de eis, dat  $\Omega(z)$  in  $G$  een analytische functie moet zijn, wordt  $\Omega(z)$  natuurlijk niet bepaald. Aan deze eis moeten we een voorwaarde voor  $\Omega$  op de rand van  $G$  toevoegen. Teneinde deze voorwaarde af te leiden, realiseren we ons, dat de rand van  $G$  wordt gevormd door de kust, en dat een kust op fysische grond zeker een stroomlijn moet zijn.

Uit (2.9) en (2.10) volgt echter op eenvoudige wijze, dat de



stroomlijnen worden gegeven door de krommen:

$$\Theta = \text{constant} \quad (3.1)$$

Eveneens valt uit de definitie van  $\Theta$  af te leiden, dat de totale stroom  $\sum_{AB}$  door een willekeurige kromme tussen twee punten A en B in G, wordt gegeven door:

$$\sum_{AB} = \frac{gD}{4\pi I} (\Theta_B - \Theta_A), \quad (3.2)$$

en dus onafhankelijk is van de gekozen kromme. M.a.w.: het verschil van de waarden van  $\Theta$  op twee verschillende stroomlijnen geeft op een factor na de tussen deze stroomlijnen door stromende vloeistofhoeveelheid aan.

Uit deze eigenschappen blijkt, dat de benaming stroomfunctie voor  $\Theta$  op zijn plaats is.

We keren terug tot (3.1) en hebben daar dus een randvoorwaarde, die we nog moeten omzetten in een voorwaarde voor  $\Omega$ . Dit is zeer eenvoudig, immers volgens (2.16) geldt dus langs de rand van G:

$$\Phi + U = \text{constant} \quad (3.3)$$

We hebben derhalve volgens (2.15) de volgende

$$\text{randvoorwaarde aan een kust: } \operatorname{Re} \Omega = \Phi = -U + \text{const.} \quad (3.4)$$

In TW23 is uitvoerig nagegaan in hoeverre  $\Omega$  (en daarmee  $\zeta$  en  $\Theta$ ) door deze voorwaarden ( $\Omega$  analytisch in G en voldoet aan (3.4) op de rand van G) eenduidig is bepaald. Er blijkt, dat we onderscheid moeten maken tussen begrensde en niet-begrensde gebieden G en het resultaat is in deze gevallen:

1°. G is begrensd; de rand van G bestaat dan uit een enkele gesloten kromme  $\Gamma$ :

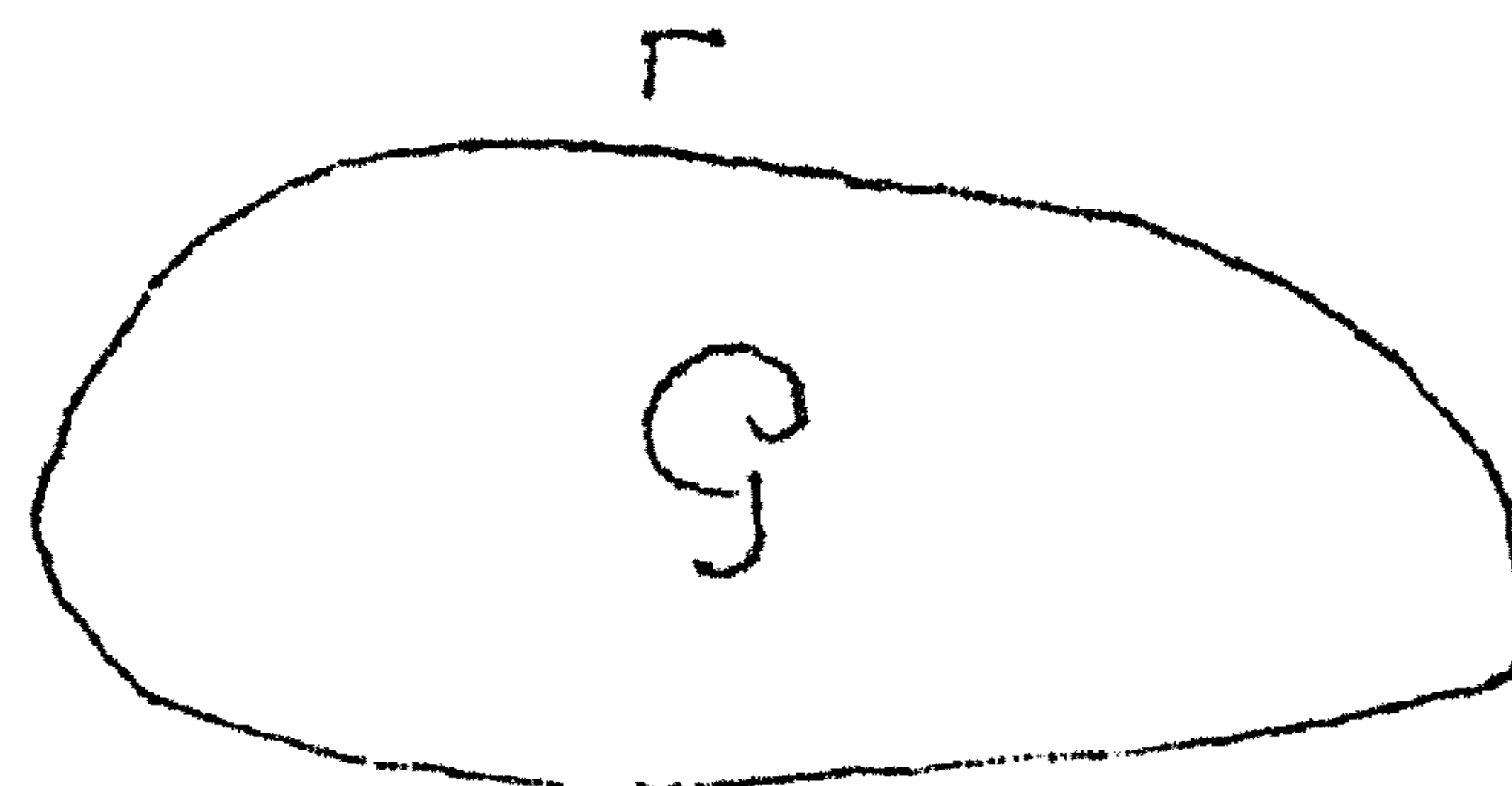
$\Omega(z)$  is bepaald op een additieve imaginaire constante na. Deze constante

bepalen we door te eisen, dat de totale hoeveelheid water constant blijft. Dit wordt uitgedrukt door de bijvoorwaarde:

$$\oint_G \zeta d\omega = 0 \quad (3.5)$$

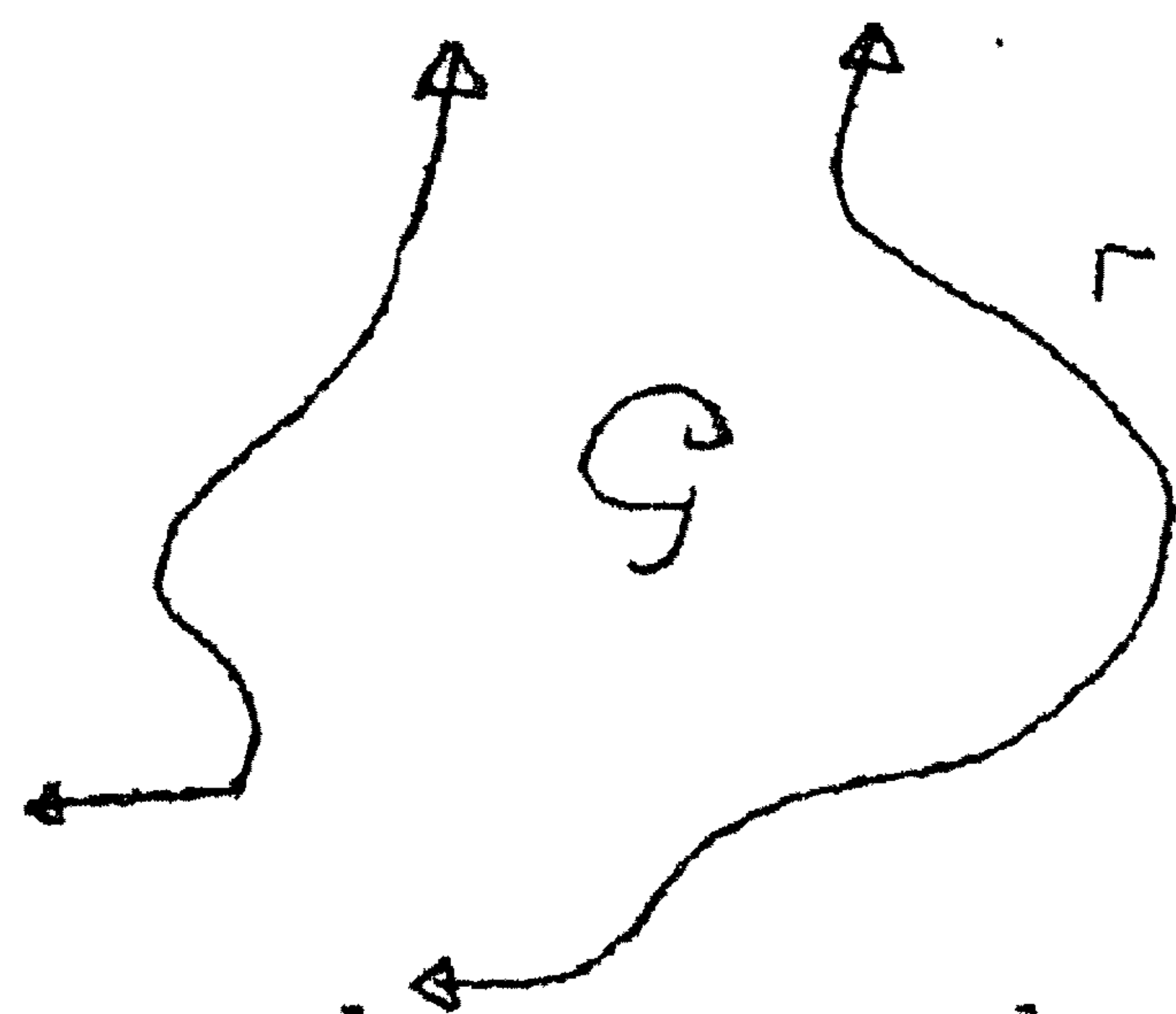
Er geldt:

Bij gegeven windveld ( $W_1(x,y)$  en  $W_2(x,y)$ ), zowel als bij gegeven windpotentialen ( $U(x,y)$  en  $V(x,y)$ ) zijn  $\Theta$  en  $\zeta$  in een begrensd gebied eenduidig bepaald door de randvoorwaarde (3.4) en de bijvoorwaarde (3.5).





2°.  $G$  is niet-begrensd, maar de rand  $\Gamma$  van  $G$  bestaat uit eindig veel delen, die in het eindige of oneindige samenhangen:



Hoewel een niet-begrensde zee uiteraard niet voorkomt, is het toch zinvol dit geval te beschouwen, daar voor dergelijke gebieden in verschillende gevallen expliciete oplossingen van het probleem kunnen

worden gevonden, zodat inzicht kan worden verkregen in de aard van de onbekende functies.

Bij deze niet-begrensde gebieden blijkt dat een voor de eenduidigheid belangrijke factor is, of het windveld wat we zullen noemen "quasi-begrensd is", of niet.

Onder een "quasi-begrensd" windveld verstaan we een windveld, waarbij  $W_1(x,y)$  en  $W_2(x,y)$  voldoende sterk naar 0 naderen, als  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ . In dit geval kunnen we  $U$  en  $V$  altijd zo bepalen, dat deze eigenschap ook voor de windpotentialen geldt.

De bijvoorwaarde (3.5), die zegt dat de totale waterhoeveelheid constant blijft, en die we bij een begrensd gebied inachtnamen, kan hier niet steeds gehandhaafd worden, daar de totale hoeveelheid extra water bij een niet-begrensd gebied niet begrensd hoeft te zijn.

Het resultaat wordt:

Bij quasi-begrensde windvelden eisen we als extra voorwaarde voor  $\Omega$ , dat  $\Omega(z)$  uniform in  $z$  naar 0 nadert, als  $|z| \rightarrow \infty$ .

$\Omega$ ,  $\Theta$  en  $\zeta$  zijn dan eenduidig bepaald, terwijl  $\zeta(\infty) = 0$  wordt. Is het windveld niet quasi-begrensd, dan levert de eenduidigheid moeilijkheden op. In 7. wordt een voorbeeld van dit geval gegeven.

In principe kunnen met behulp van het tot nu toe bereikte resultaat, de stroming in een zee en de vorm van het zee oppervlak in de stationaire toestand, die ontstaat onder invloed van een stationair windveld, bij willekeurig gegeven windpotentialen voor een zee van constante diepte worden berekend, zij het in het algemeen slechts langs numerieke weg.

In 4. zullen we echter een aantal speciale windvelden beschouwen, die we door gesloten uitdrukkingen in  $x$  en  $y$  kunnen voorstellen, en waarbij voor verschillende gebieden de bijbehorende  $\zeta$  en  $\Theta$  expliciet kunnen worden bepaald. We kiezen daarbij windpotentialen van een dusdanige gedaante, dat deze, zij het veelal slechts zeer globaal



of in een beperkt gebied, een indruk geven van het windveld, dat door een depressie wordt teweeggebracht. Deze gekozen velden hebben natuurlijk niet de pretentie, een depressie correct weer te geven, doch wel kan langs deze weg een inzicht worden verkregen in de aard en de eigenschappen van de fysische grootheden  $S_1$ ,  $S_2$  en  $\zeta$ , terwijl dit bij uitsluitend numerieke berekeningen aanzienlijk moeilijker is.

#### 4. Speciale windvelden.

##### a. Rotatie-vrije en divergentie-vrije windvelden.

In 2. zagen we dat we ieder windveld kunnen beschrijven door een tweetal windpotentialen  $U$  en  $V$ . Stellen we

$$W_1^{(1)} = - \frac{\rho g D}{4\pi} \cdot \frac{\partial V}{\partial x}, \quad W_2^{(1)} = - \frac{\rho g D}{4\pi} \cdot \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$W_1^{(2)} = - \frac{\rho g D}{4\pi} \cdot \frac{\partial U}{\partial y}, \quad W_2^{(2)} = \frac{\rho g D}{4\pi} \frac{\partial U}{\partial x},$$

dan volgt uit (2.5) en (2.6)

$$W_1 = W_1^{(1)} + W_1^{(2)}, \quad W_2 = W_2^{(1)} + W_2^{(2)}.$$

Het windveld  $(W_1^{(1)}, W_2^{(1)})$  is dan rotatie-vrij en het windveld  $(W_1^{(2)}, W_2^{(2)})$  is divergentie-vrij. Dus: ieder windveld is te splitsen in een rotatie-vrij bestanddeel, voortgebracht door de potentialen  $(0, V)$  en een divergentie-vrij bestanddeel, voortgebracht door  $(U, 0)$ .

Omgekeerd kan worden aangetoond, dat we bij een rotatie-vrij windveld steeds  $U = 0$  en bij een divergentie-vrij windveld steeds  $V = 0$  kunnen kiezen (nodig is dit niet, een windveld met potentialen  $U$  en  $V$  is reeds rotatie-vrij als  $\Delta U = 0$ , divergentie-vrij als  $\Delta V = 0$ ).

Daar de differentiaalvergelijkingen (2.2), (2.3) en (2.4) lineair zijn kunnen we in het volgende, waar nodig, de effecten van het rotatie-vrije en het divergentie-vrije deel van een gegeven windveld geheel afzonderlijk behandelen en tenslotte bij elkaar op tellen.

In 5. zullen we voor een rotatie-vrij windveld  $\zeta$  en  $\Theta$  bepalen. Dit blijkt zeer eenvoudig te gaan, zodat we ons in het volgende hoofdzakelijk met het divergentie-vrije deel van windvelden bezig zullen houden.

##### b. Homogene windvelden.

Zijn  $U$  en  $V$  beide lineaire functies van  $x$  en  $y$ , dan zijn  $W_1$  en  $W_2$  constant volgens (2.5) en (2.6) en we hebben dus te maken met het speciale geval van een homogeen windveld. Een dergelijk veld is zowel rotatie- als divergentie-vrij, immers  $\Delta U = \Delta V = 0$ .



Een homogeen windveld met componenten  $W_1$  en  $W_2$  kunnen we voorstellen door de windpotentialen:

$$U = 0 \quad V = -A_1 x - A_2 y \quad (4.1)$$

$$\text{met: } A_1 = \frac{4\pi W_1}{\rho gD}, \quad A_2 = \frac{4\pi W_2}{\rho gD} \quad (4.2)$$

Homogene velden worden verder beschouwd in 7. voor een half vlak, in 10. voor het model, dat Schalkwijk gebruikt voor Atlantische Oceaan plus Noordzee, nl. een half vlak met een rechthoek, en in 16. voor hetzelfde model, maar in de veronderstelling dat de oceaan een veel grotere diepte heeft dan de zee.

### c. Singuliere windvelden.

Onder singuliere windvelden verstaan we velden, die worden weergegeven door windpotentialen van het type:

$$U = \ln |z - z_0|, \quad V = 0 \quad (4.3)$$

$$\text{of } U = 0, \quad V = \ln |z - z_0| \quad (4.4)$$

Dergelijke velden hebben twee belangrijke eigenschappen:

1. ze bezitten circulaire symmetrie ten opzichte van het punt  $z = z_0 = x_0 + iy_0$ . (Langs cirkels om  $z_0$  zijn de tangentiële en de radiale component van de windschuifspanning constant van grootte). Deze eigenschap maakt deze windpotentialen aantrekkelijk als beeld voor een depressie, al staan daar verschillende bezwaren tegenover, waarop we direct terugkomen.
2. ze zijn (afgezien van de singulariteit in  $z_0$ ) zowel divergentie- als rotatie-vrij.

Het bezwaar van deze windpotentialen is het feit, dat ze singulier zijn in  $z = z_0$ , terwijl dit ook het geval is met het windveld zelf, zodat ze in een omgeving van  $z = z_0$  zeker niet bruikbaar zijn. Evenzeer is het gedrag voor grote  $z$  van  $U$  en  $V$  ongewenst; bij een niet-begrensd gebied zijn dit geen "quasi-begrensde" windvelden en de eenduidigheid levert moeilijkheden op.

We beschouwen deze velden desalniettemin toch, omdat ze in zekere zin toch een globale indruk geven van een circulaire depressie, terwijl  $\zeta$  en  $\Theta$  betrekkelijk eenvoudig zijn te vinden.

Ligt  $z_0$  niet in  $G$ , dan vallen deze velden onder de onder a. genoemde en kunnen analoog worden behandeld.

Ligt  $z_0$  wel in  $G$ , dan moeten we een extra eis aan  $\Omega$  stellen tengevolge van het singuliere gedrag. Er blijkt, dat we kunnen eisen, dat  $\Omega$  ook in  $z_0$  regulier en analytisch is, en dat deze bijvoorwaarde de eenwaardigheid van  $\Omega$  in een omgeving van  $z_0$  verzekert.



Daar  $W_1$  en  $W_2 \propto$  worden in  $z_0$ , is het onaangename gevolg hiervan echter, dat ook  $\zeta$  en  $S_1, S_2$  daar niet begrensd zijn.

In d. bekijken we meer algemene circulair-symmetrische windvelden, die niet rotatie-vrij behoeven te zijn, teneinde te proberen om de bezwaren, die aan de singuliere velden kleven, te ondervangen. De berekeningen voor  $\zeta$  en  $\Theta$  worden dan enigszins ingewikkelder.

Singuliere windvelden worden in 8. behandeld voor een willekeurig gebied.

#### d. Circulair-symmetrische divergentie-vrije windvelden.

Voor een willekeurig circulair-symmetrisch windveld met centrum  $(x_0, y_0)$  kunnen we schrijven (als  $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = |z-z_0|$ )

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= W_1^{(1)} + W_1^{(2)} \\ W_2 &= W_2^{(1)} + W_2^{(2)} \end{aligned} \right\}$$

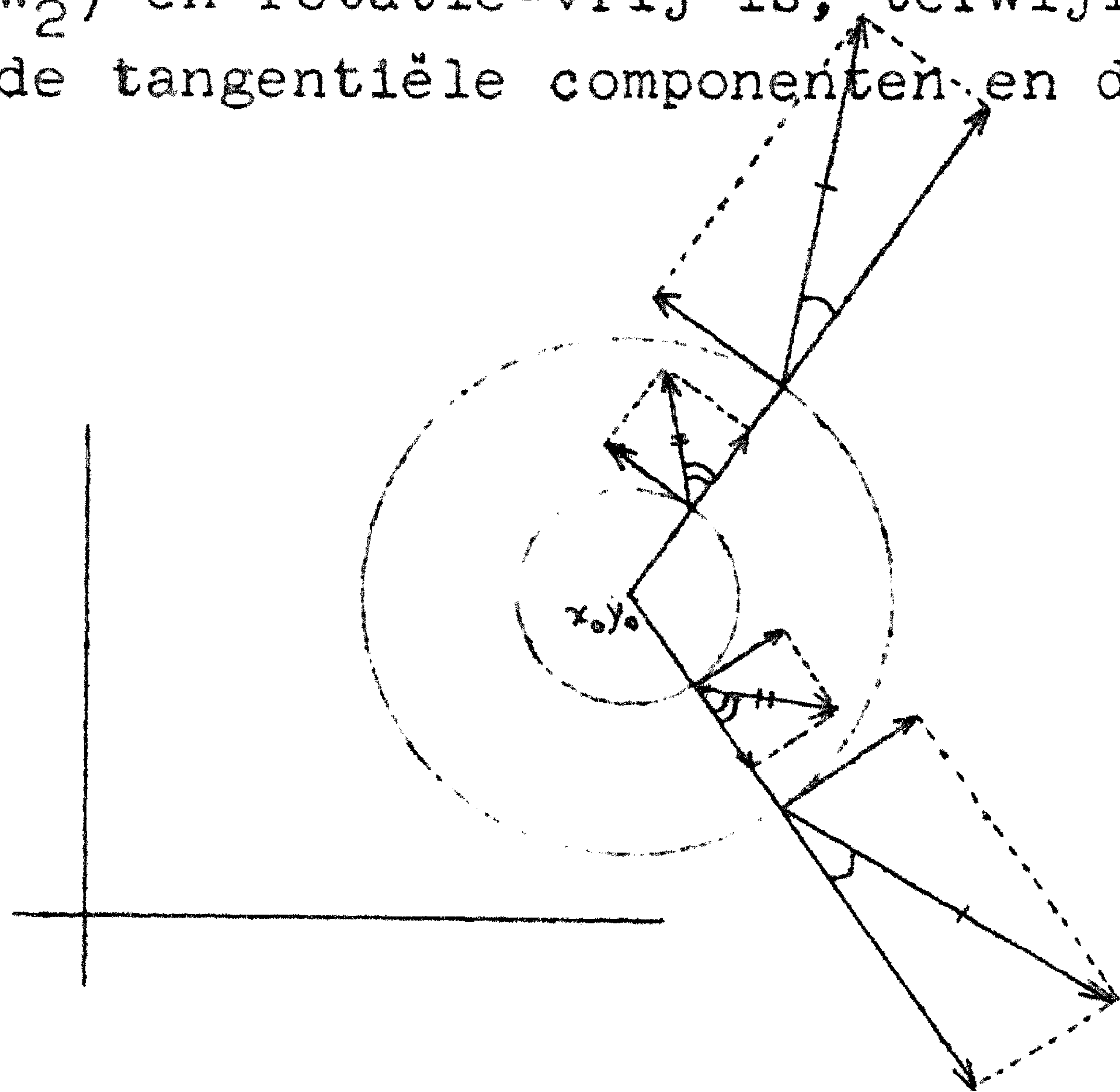
$$\text{met} \quad \left. \begin{aligned} W_1^{(1)} &= (x-x_0) f(r) \\ W_2^{(1)} &= (y-y_0) f(r) \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} W_1^{(2)} &= -(y-y_0) g(r) \\ W_2^{(2)} &= (x-x_0) g(r) \end{aligned} \right\}$$

Het is duidelijk dat het veld  $(W_1^{(1)}, W_2^{(1)})$  bestaat uit de radiale componenten van het veld  $(W_1, W_2)$  en rotatie-vrij is, terwijl het veld  $(W_1^{(2)}, W_2^{(2)})$  bestaat uit de tangentiële componenten en divergentie-vrij is.

Op grond van de onder a. gemaakte opmerking zullen we ons hier verder alleen met het divergentie-vrije deel bezig houden. We beschouwen dus windvelden van de vorm

$$W_1 = -(y-y_0) \cdot g(r) \quad (4.5)$$

$$W_2 = (x-x_0) \cdot g(r) \quad (4.6)$$



(bij symmetrie ten opzichte van  $z_0 = x_0 + i y_0$ ) en deze velden worden weergegeven door potentialen van het type:

$$U = U(r), \quad V = 0 \quad (4.7)$$

$$\text{met:} \quad U(r) = \frac{4\pi}{\rho g D} \int r g(r) dr + \text{const.} \quad (4.8)$$

Worden omgekeerd windpotentialen van de vorm (4.7) gegeven, dan geldt volgens (2.5) en (2.6):

$$W_1 = - \frac{\rho g D}{4\pi} \frac{dU}{dr} \cdot \frac{y-y_0}{r} \quad (4.9)$$

$$W_2 = \frac{\rho g D}{4\pi} \frac{dU}{dr} \cdot \frac{x-x_0}{r}, \quad (4.10)$$



en het windveld is circulair-symmetrisch en divergentie-vrij.  
De sterkte  $|\vec{W}|$  is gelijk aan  $\frac{\rho g D}{4\pi} \left| \frac{dU}{dr} \right|$ .

In 6. zullen we een drietal voorbeelden van dergelijke velden beschouwen, voor het geval dat G een half vlak is, nl.:

I.  $U = \ln r$ . Dit windveld hoort thuis onder de in b. genoemde singuliere velden. U is singulier in  $z_0$  en in het oneindige. Volgens (4.9) en (4.10) is:  $W_1 = -\frac{\rho g D}{4\pi} \cdot \frac{y-y_0}{r^2}$ ,  $W_2 = \frac{\rho g D}{4\pi} \cdot \frac{x-x_0}{r^2}$ .

II.  $U = \frac{1}{2} \ln (r^2 + b^2)$ . U is singulier op  $\infty$ , maar regulier in  $z_0$ ,  
 $W_1 = -\frac{\rho g D}{4\pi} \cdot \frac{y-y_0}{r^2+b^2}$ ,  $W_2 = \frac{\rho g D}{4\pi} \cdot \frac{x-x_0}{r^2+b^2}$ ; de grootte van de vector  $\vec{W}$  met componenten  $W_1$  en  $W_2$  is  $|\vec{W}| = \frac{\rho g D}{4\pi} \cdot \frac{r}{r^2+b^2}$  en  $|\vec{W}|$  is maximaal voor  $r = b$ , nl.  $\frac{1}{2} \frac{\rho g D}{4\pi b}$ . Voor grote r is  $|\vec{W}| \approx \frac{\rho g D}{4\pi r}$  dus in het oneindige gedraagt II zich op dezelfde manier als I.

III.  $U = -\frac{b^2}{2(r^2+b^2)}$ . U is nergens singulier,

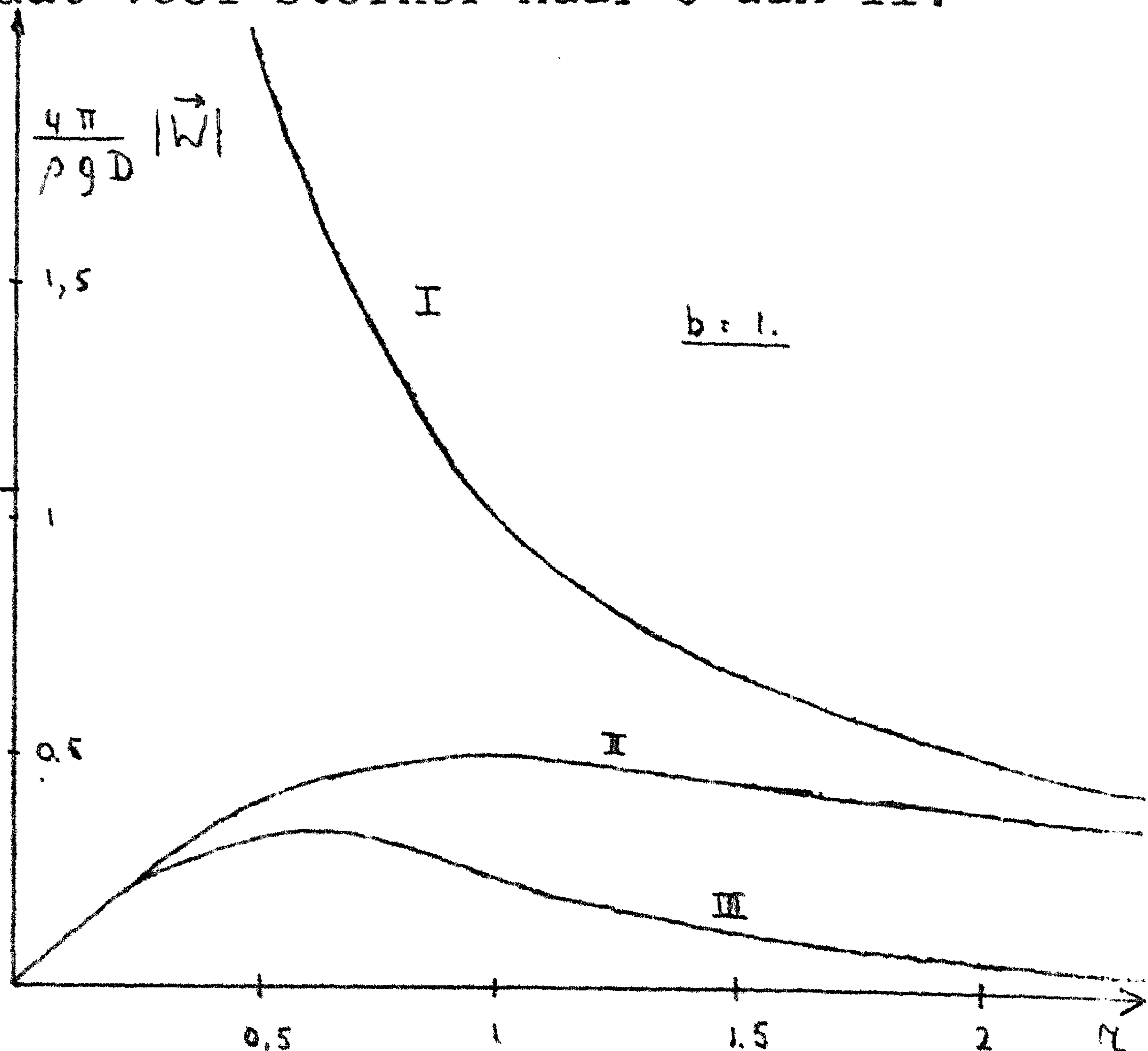
$$W_1 = -\frac{\rho g D}{4\pi} \cdot \frac{b^2(y-y_0)}{(r^2+b^2)^2}, \quad W_2 = \frac{\rho g D}{4\pi} \cdot \frac{b^2(x-x_0)}{(r^2+b^2)^2},$$

$$|\vec{W}| = \frac{\rho g D}{4\pi} \cdot \frac{b^2 r}{(r^2+b^2)^2}$$

$|\vec{W}|$  is maximaal voor  $r = \frac{1}{3} b \sqrt{3}$ , nl.  $\frac{3\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{\rho g D}{4\pi b}$ . Voor grote r is  $|\vec{W}| \approx \frac{\rho g D}{4\pi} \cdot \frac{b^2}{r^3}$ , dus III gaat veel sterker naar 0 dan II.

De drie windvelden zijn links-circulair en kunnen daarom worden opgevat als beschrijvingen van depressies op het Noordelijk halfrond. Bij II en III bepaalt b de uitgebreidheid van het veld (afstand kern tot maximum).

Het gedrag van  $|\vec{W}|$  als functie van r is aangegeven in de nevenstaande figuur.





## 5. Rotatie-vrij windveld boven een afgesloten zee.

Zoals vroeger reeds is opgemerkt moet voor een rotatie-vrij windveld gelden  $\Delta U = 0$ . Uit deze eigenschap van  $U$  volgt volgens een bekende stelling dat er een in  $G$  analytische functie  $\Lambda(z)$  is, zodanig dat  $U = \operatorname{Re} \Lambda(z)$ .

Het is duidelijk dat aan de randvoorwaarde (3.4) voldaan wordt door

$$\Omega(z) = -\Lambda(z) + iC = -U + i(-\operatorname{Im} \Lambda + C) \quad (5.1)$$

geldt, waarin  $C$  een reële constante is. Uit (2.16) en (2.17) volgt dan

$$\Theta = 0 \quad (5.2)$$

$$\zeta = -\lambda(V - \operatorname{Im} \Lambda + C). \quad (5.3)$$

De vrije constante  $C$  in (5.3) moeten we bepalen met behulp van de nevenvoorwaarde (3.5).

Uit (5.2) blijkt de volgende eigenschap:

bij een rotatie-vrij windveld boven een afgesloten zee treedt geen stroming op.

Wanneer  $U = 0$  volgt uit (5.3), (2.5), (2.6) en de definitie van  $\lambda$

$$\zeta(x,y) = \frac{1}{\rho gH} \int_{(x,y_0)}^{(x,y)} (W_1 dx + W_2 dy) + \text{const.} \quad (5.4)$$

Daar we bij een rotatie-vrij windveld steeds  $U = 0$  kunnen kiezen, geldt (5.4) algemeen voor een afgesloten zee.

Deze resultaten gelden ook nog voor een niet-begrensde zee, mits het windveld "quasi-begrensd" is (vgl. 3).

Hebben we in het bijzonder te maken met een homogeen windveld boven een afgesloten zee, en zijn  $(X_0, Y_0)$  de coördinaten van het zwaartepunt van  $G$ , dan geldt:

$$\zeta = \frac{1}{\rho gH} \{ W_1(x - X_0) + W_2(y - Y_0) \} \quad (5.5)$$

Dit resultaat is in overeenstemming met dat van Schalkwijk ([4], p. 22).

## 6. Circulaire, divergentie-vrije windvelden boven een half vlak.

We stellen de zee voor door het halve vlak  $\operatorname{Im} z > 0$  en berekenen het effect van de windvelden I, II en III uit 4c.

We nemen  $z_0 = ia$  met  $a$  reëel ("Kern der depressie").



I.  $U = \ln |z - ia|$ ,  $V = 0$ .

Het is van belang onderscheid te maken tussen

$a > 0$  en  $a < 0$ :

A)  $a < 0$ . ( $z_0$  niet in  $G$ ).

Het windveld is dan niet singulier in  $G$  en kan op

dezelfde manier worden behandeld als voor willekeurige rotatie-vrij velden in 5. is aangegeven. (Dat I ook rotatie-vrij is, volgt uit het feit, dat  $\Delta U = 0$ ). Alleen hebben we hier niet te maken met een afgesloten zee, terwijl het windveld ook niet "quasi-begrensd" is. Teneinde de oplossing eenduidig te bepalen, kunnen we voorschrijven dat  $\zeta(0) = 0$  moet zijn, en vinden dan als oplossing:

$$\Omega(z) = -\ln(z - ia) + \frac{\pi i}{2} \quad (6.1)$$

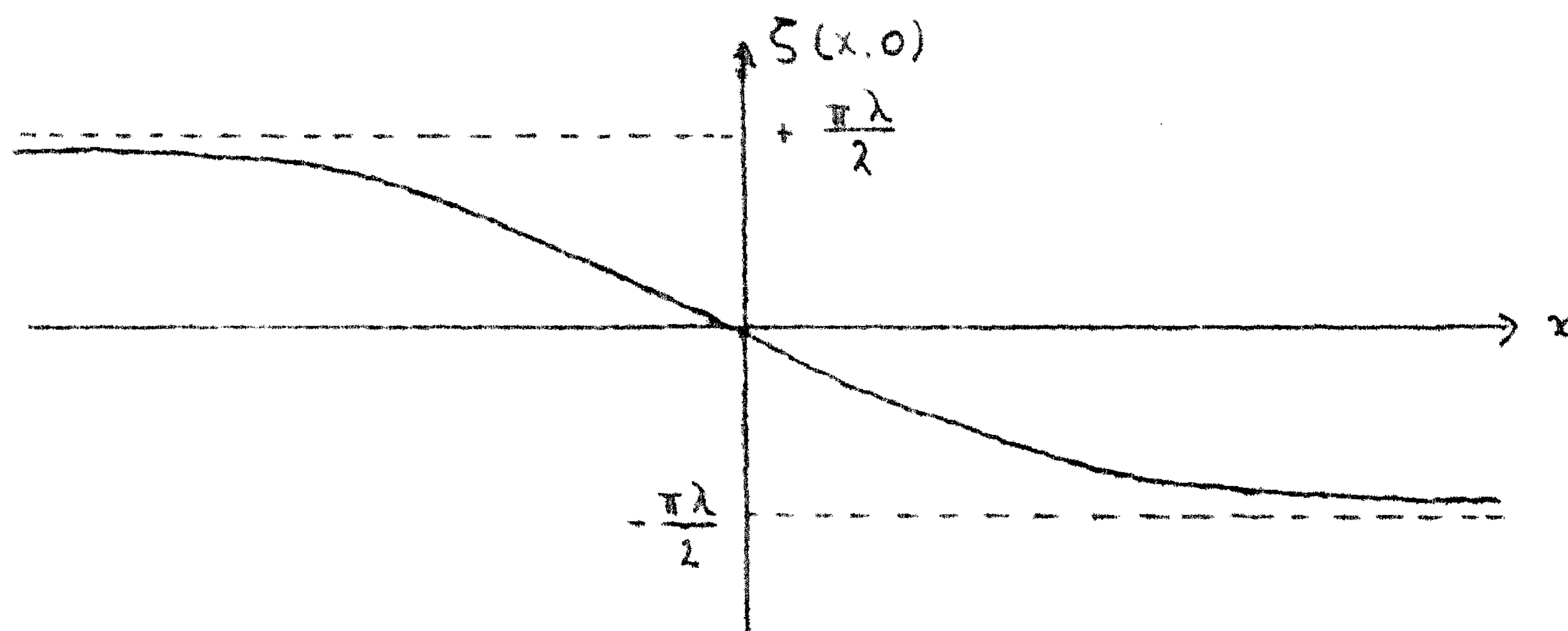
$$\text{waaruit volgt: } \Theta(x, y) = 0 \quad (6.2)$$

$$\zeta(x, y) = -\lambda b g \operatorname{tg} \frac{x}{y + |a|}. \quad (6.3)$$

(6.2) geeft hetzelfde resultaat als we in 5. vonden voor een rotatievrij windveld boven een afgesloten zee.

Langs de kust ( $y=0$ ), geldt volgens (6.3):

$$\zeta(x, 0) = -\lambda b g \operatorname{tg} \frac{x}{|a|} \quad (6.4)$$



B)  $a > 0$ . ( $z_0$  in  $G$ ).

Volgens 4b. eisen we, dat  $\Omega(z)$  ook in  $z_0 = ia$  analytisch is.

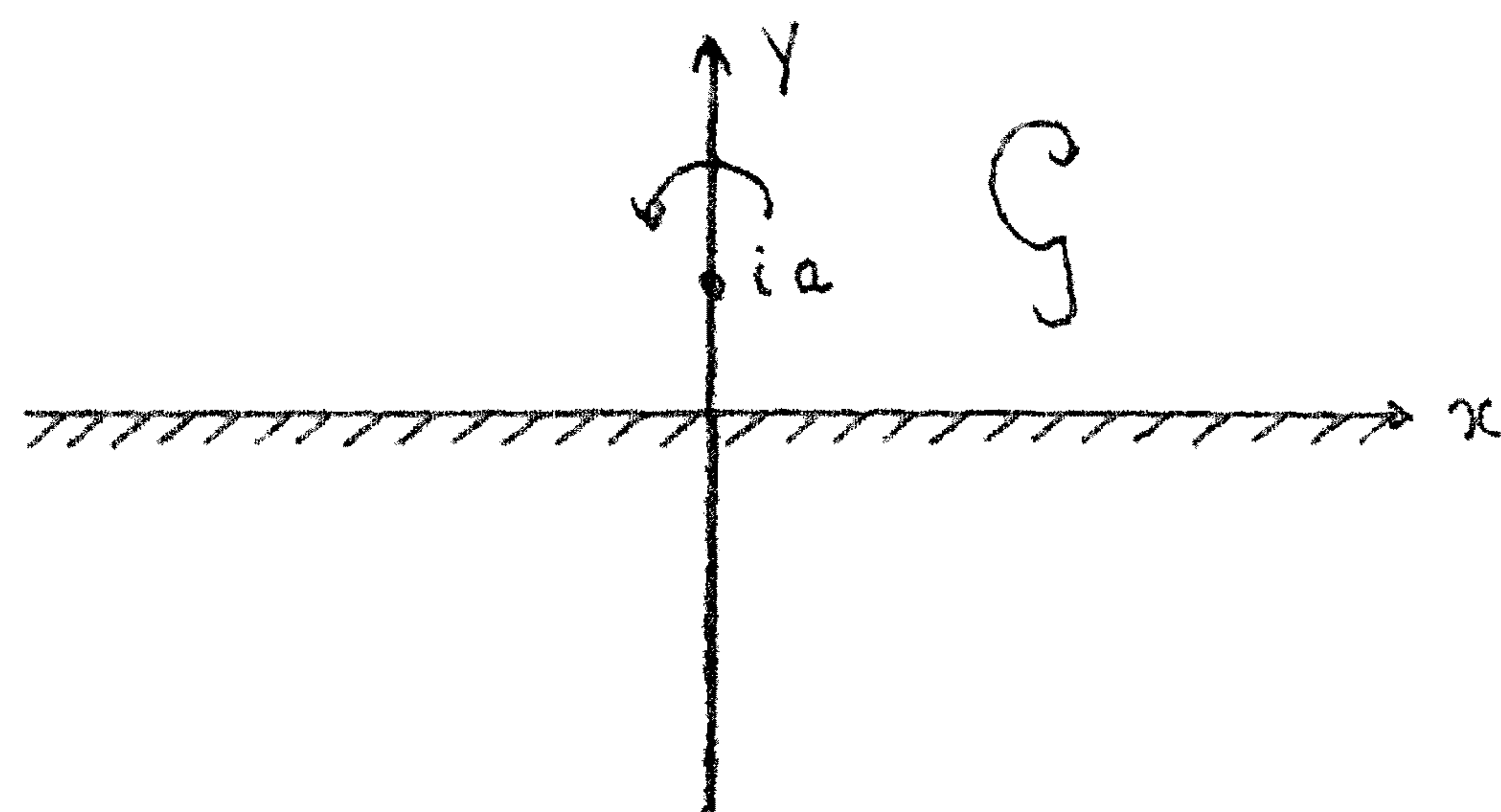
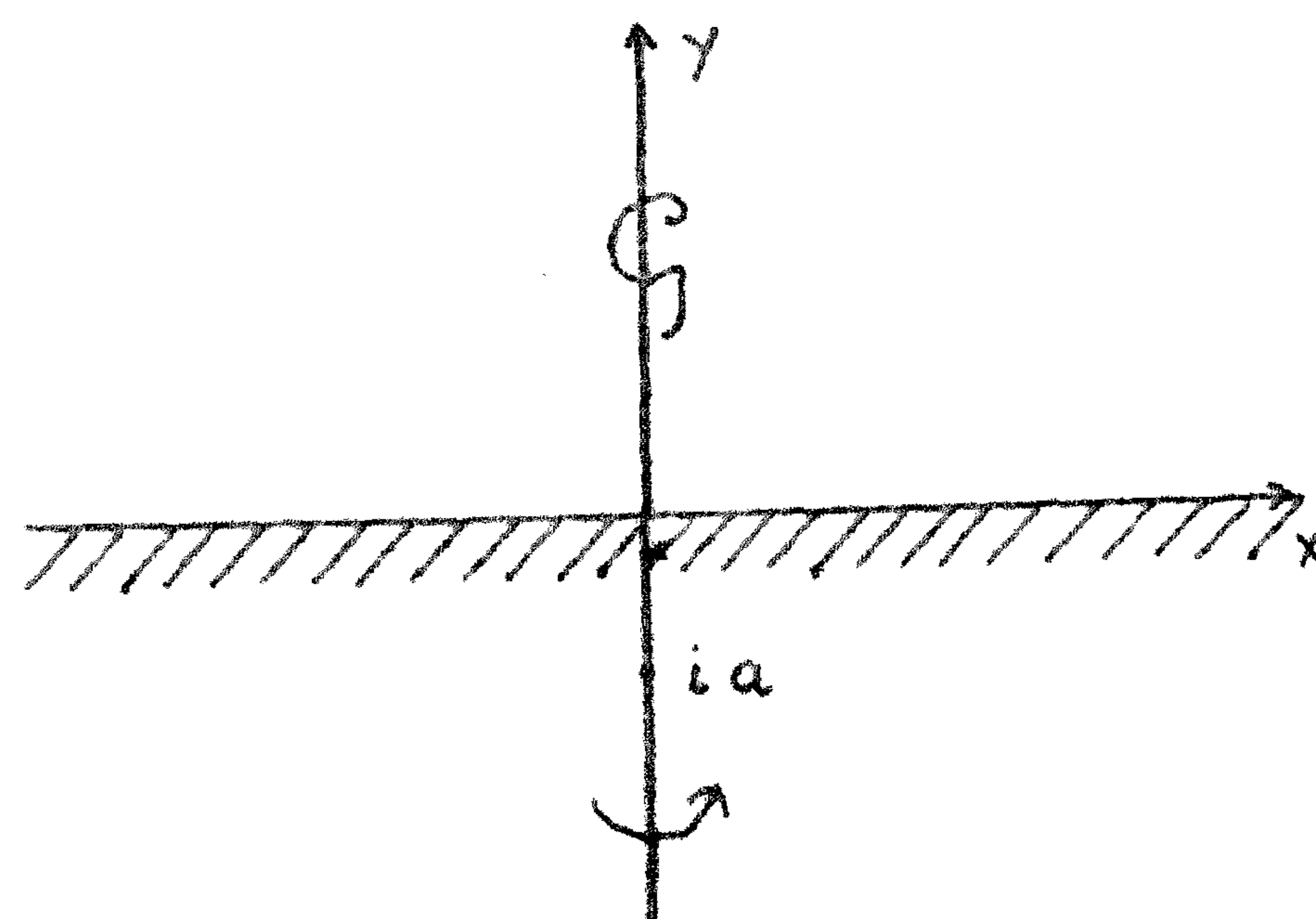
Als oplossing vinden we dan:

$$\Omega(z) = -\ln(z + ia) + \frac{\pi i}{2}. \quad (6.5)$$

$$\text{Terwijl: } \Theta(x, y) = \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{x^2 + (y-a)^2}{x^2 + (y+a)^2} \quad (6.6)$$

$$\zeta(x, y) = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + (y-a)^2}{x^2 + (y+a)^2} - \lambda b g \operatorname{tg} \frac{x}{y+a}. \quad (6.7)$$

Zoals in 4b. reeds is opgemerkt, zijn  $\Theta$  en  $\zeta$  niet begrensd in  $z = ia$ , maar naderen tot  $-\infty$ .





Langs de kust geldt, juist als in A):

$$\zeta(x,0) = -\lambda b g \operatorname{tg} \frac{x}{a}. \quad (6.8)$$

Het singuliere gedrag van  $U$  in  $z_0$  uit zich dus op duidelijke wijze. Dat  $U$  ook singulier is in het oneindige, is de oorzaak van het onbevredigende feit, dat  $\zeta$  in het oneindige niet naar 0 gaat.

$$\text{II. } U = \frac{1}{2} \ln(|z-ia|^2 + b^2), \quad V = 0.$$

We vinden als oplossing:

$$\Omega(z) = -\ln(z+ic) + \frac{\pi i}{2} \quad (6.9)$$

$$\text{waarin } c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\text{Verder geldt: } \Theta(x,y) = \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{x^2 + (y-a)^2 + b^2}{x^2 + (y+c)^2} \quad (6.10)$$

$$\zeta(x,y) = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + (y-a)^2 + b^2}{x^2 + (y+c)^2} - \lambda b g \operatorname{tg} \frac{x}{y+c} \quad (6.11)$$

en langs de kust:

$$\zeta(x,0) = -\lambda b g \operatorname{tg} \frac{x}{c}. \quad (6.12)$$

Omdat  $U$  niet singulier is in  $z_0 = ia$ , blijven  $\Theta$  en  $\zeta$  overal begrensd. In het oneindige gedraagt II zich echter juist als I en  $\zeta$  nadert 0, nu niet naar 0 in het oneindige.

Deze keuze voor  $U$  geeft dus nog niet in alle opzichten een bevredigend resultaat, al is het gedrag in  $z_0$  beter bruikbaar dan bij I.

Ter illustratie van de uitkomsten (6.10) en (6.11) zijn in de platen 1 en 2 respectievelijk de stroomlijnen ( $\Theta = \text{constant}$ ) en de niveaulijnen ( $\zeta = \text{constant}$ ) van de zee onder invloed van windveld II getekend. Voor de numerieke gegevens is genomen:  $a = 1$ ,  $b = \sqrt{15}$ , dus  $c = 4$ , terwijl aan de formule voor  $U$ , en dus ook aan de uitkomsten voor  $\Theta$  en  $\zeta$  een factor  $b$  is toegevoegd.

$$\text{III. } U = -\frac{b^2}{2(|z-ia|^2 + b^2)}, \quad V = 0.$$

Dit windveld is nergens singulier. Het is quasi-begrensd en volgens de afspraak in 3. 2° bepalen we die oplossing voor  $\Omega(z)$ , die uniform in  $z$  naar 0 nadert, als  $|z| \rightarrow \infty$ .

$$\text{Het resultaat is: } \Omega(z) = -\frac{b^2}{2ic(z+ic)} \quad (6.13)$$

$$\text{waarin weer } c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Voor  $\Theta$  en  $\zeta$  volgt hieruit:

$$\Theta(x,y) = \frac{b^2}{2\lambda c} \left\{ \frac{y+c}{x^2 + (y+c)^2} - \frac{c}{x^2 + (y-a)^2 + b^2} \right\} \quad (6.14)$$

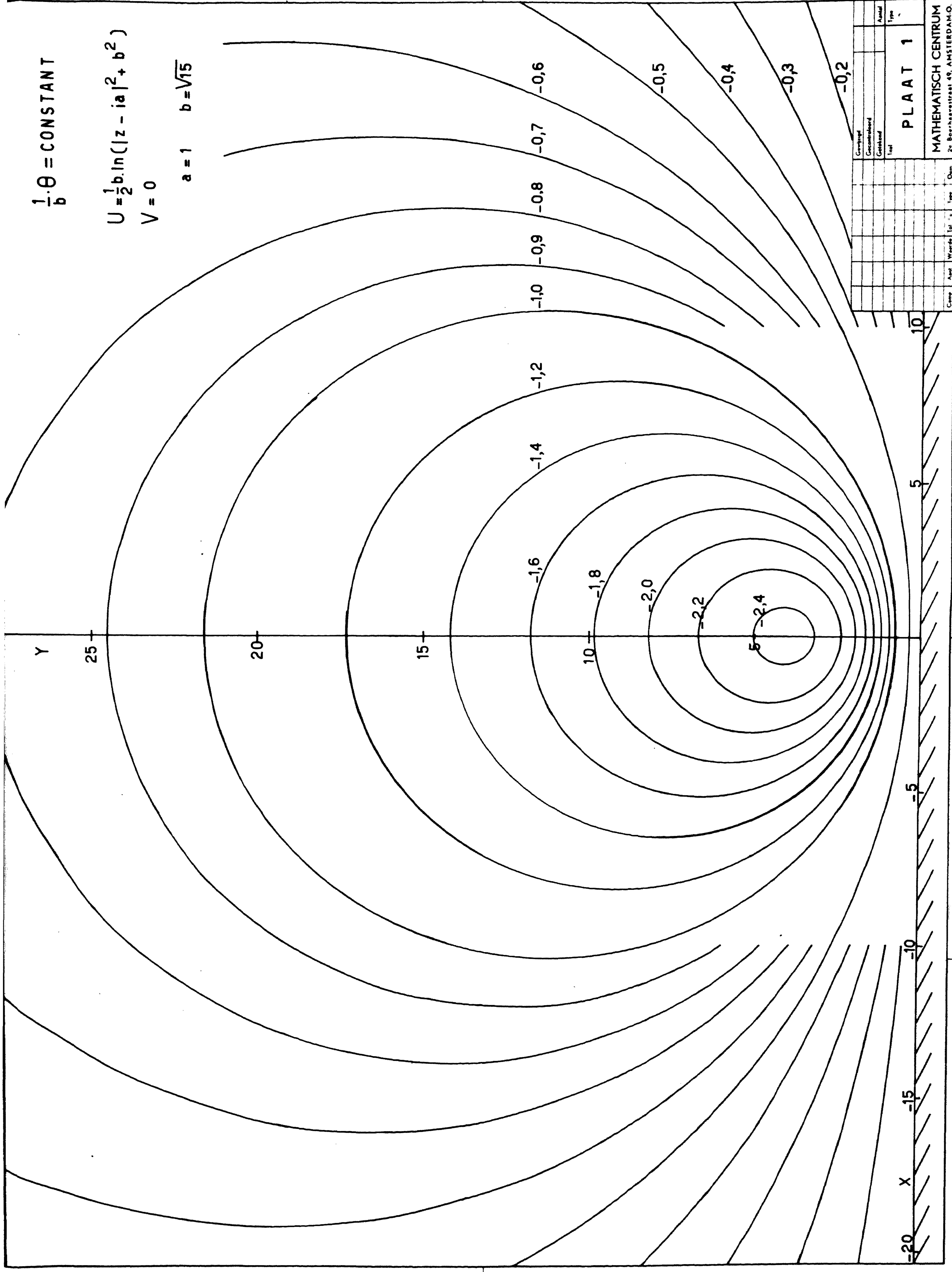


$$\frac{1}{p} \cdot \theta = \text{CONSTANT}$$

$$U = \frac{1}{2} b \cdot \ln(|z - ia|^2 + b^2)$$

$$V=0$$

$$a = 1 \quad b = \sqrt{15}$$

[illegible]



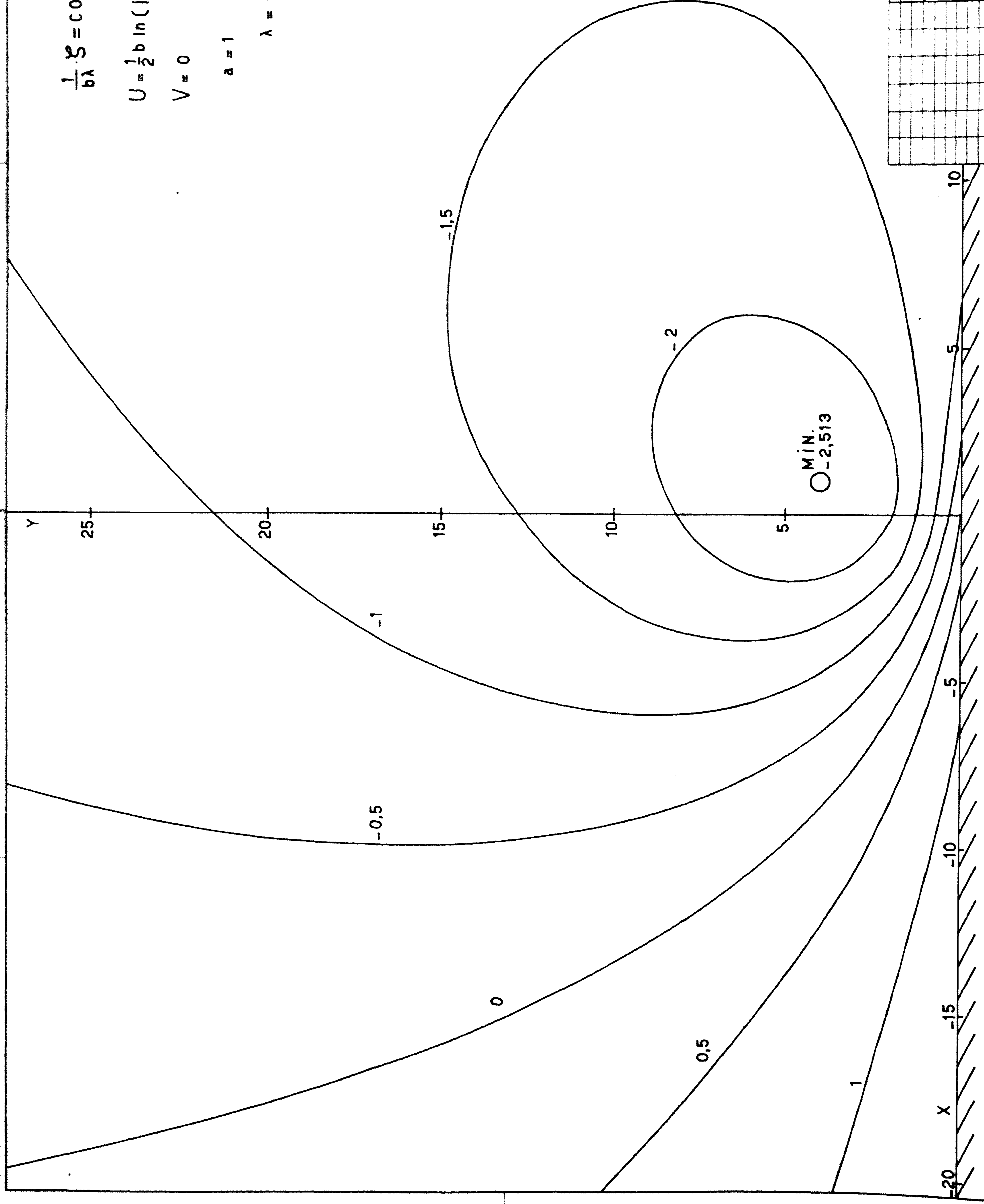
$$\frac{1}{b\lambda} \cdot \Sigma = \text{CONSTANT}$$

$$U = \frac{1}{2} b \ln(|z - ia|^2 + b^2)$$

$$V = 0$$

$$a = 1 \quad b = \sqrt{15}$$

$\lambda = 0,2$

[illegible]

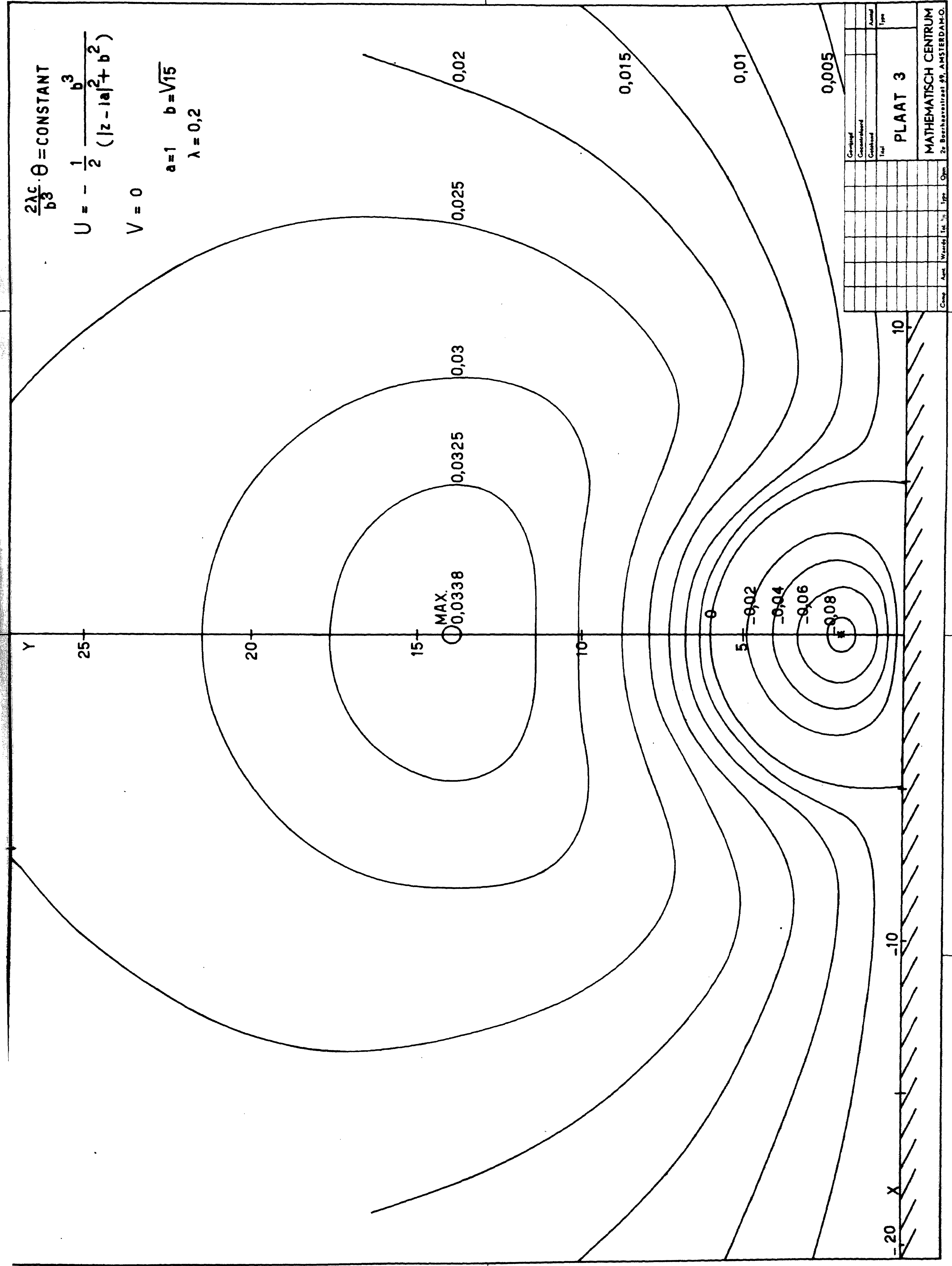


$$\frac{2\gamma c}{b\beta} \cdot \theta = \text{CONSTANT}$$

$$U = -\frac{1}{2} \frac{b^3}{(|z-a|^2+b^2)}$$

$$V = 0$$

$$a=1 \quad b=\sqrt{15}$$
$$\lambda=0,2$$

[illegible]



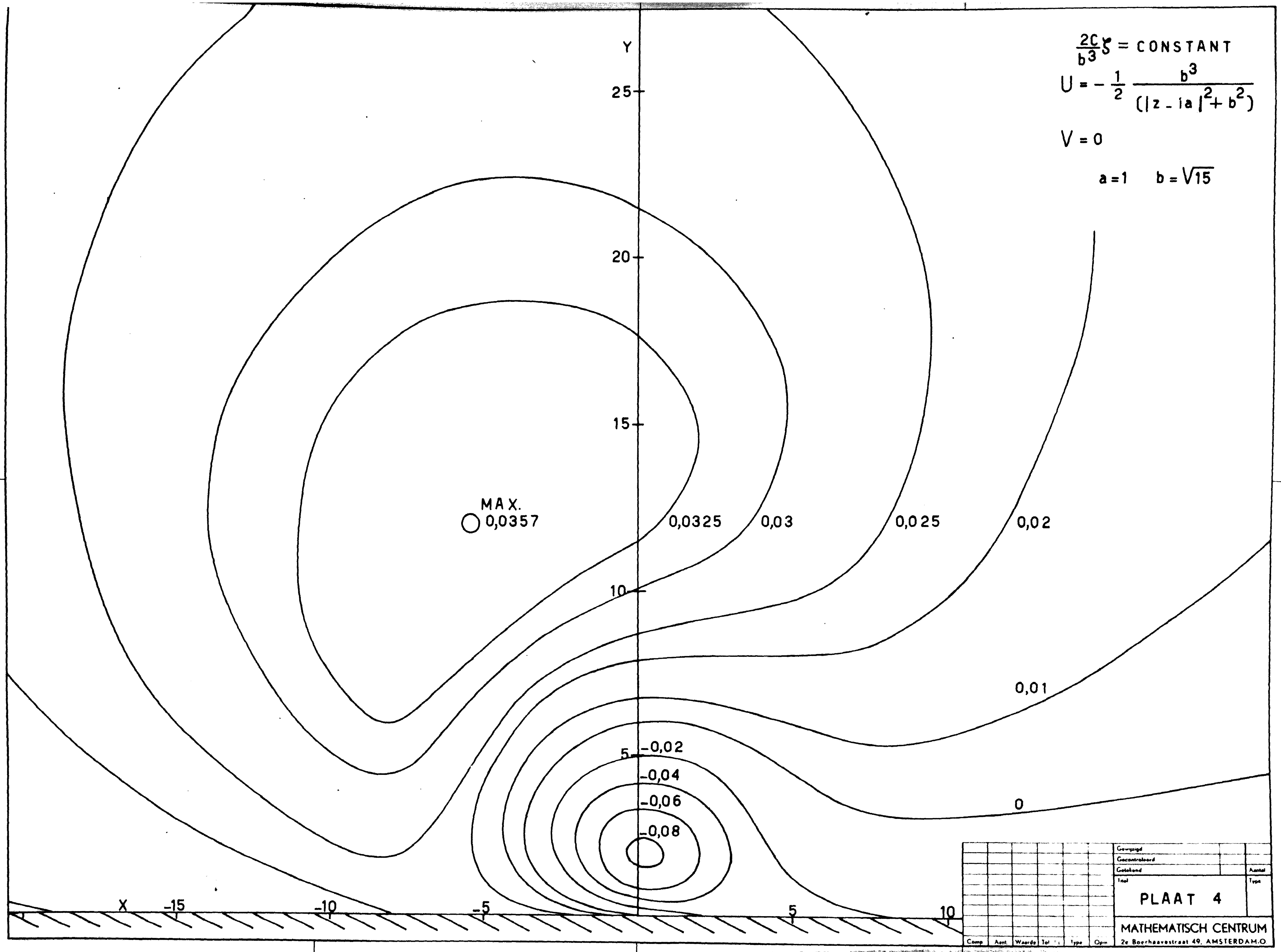
11

$$\frac{2C}{b^3} \varphi = \text{CONSTANT}$$

$$U = -\frac{1}{2} \frac{b^3}{(|z - ia|^2 + b^2)}$$

$$V = 0$$

$$a = 1 \quad b = \sqrt{15}$$



--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



$$\zeta(x,y) = \frac{b^2}{2c} \left\{ \frac{y-\lambda x+c}{x^2+(y+c)^2} - \frac{c}{x^2+(y-a)^2+b^2} \right\} \quad (6.15)$$

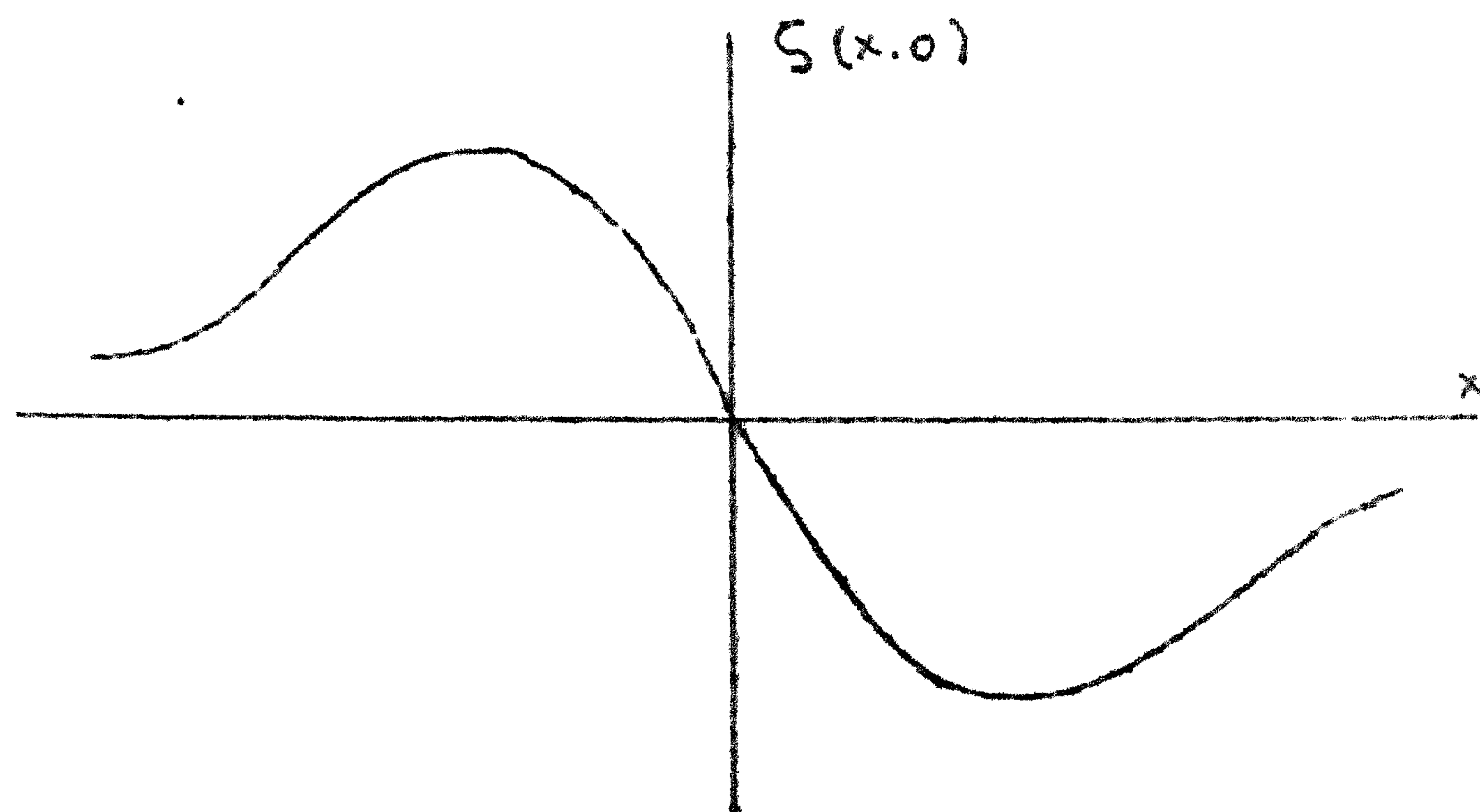
$$\text{Langs de kust: } \zeta(x,0) = -\frac{\lambda b^2}{2c} \cdot \frac{x}{x^2+c^2} \quad (6.16)$$

Bij dit windveld is het gedrag van  $\zeta$  en  $\Theta$  dus beter: beide zijn overal begrensd en gaan in het oneindige uniform naar 0.

$\Theta = 0$  langs de reële as, in het oneindige en langs dat deel van de cirkel:

$$x^2+(y-a)^2=(a+c)^2, \text{ dat in } G \text{ ligt.}$$

De platen 3 en 4 geven resp. de stroomlijnen en de niveaукrommen voor dit geval weer. De numerieke gegevens zijn gelijk aan die voor de platen 1 en 2.



### 7. Homogeen windveld boven een half vlak.

We beschouwen het windveld  $(W_1, W_2)$  boven het halve vlak  $\text{Im } z > 0$  ( $W_1$  en  $W_2$  constant). Volgens (4.1) kunnen we voor de windpotentialen nemen:

$$U = 0, \quad V = -A_1 x - A_2 y, \quad (7.1)$$

waarin  $A_1$  en  $A_2$  worden gegeven door (4.2).

Bij een homogeen windveld boven een half vlak hebben we te maken met een niet "quasi-begrensd" windveld en een niet-begrensd gebied. In 3. is reeds opgemerkt, dat de oplossing dan niet eenduidig bepaald is. Inderdaad vinden we, wanneer we eisen, dat de stroom

$(S_1, S_2)$  in het oneindige begrensd is, en dat  $\zeta(0,0) = 0$ , als oplossing voor de complexe potentiaal:  $\Omega(z) = iCz$ , ( $C$  reëel) (7.2)

zodat  $\Omega(z)$  nog een vrije reële constante bevat.

$$(7.2) \text{ levert: } \lambda \Theta = -Cy \quad (7.3)$$

$$\zeta = \lambda(A_1 - C)x + (\lambda A_2 - C)y \quad (7.4)$$

Uit (7.3) blijkt, dat de stroomlijnen steeds evenwijdig aan de kust lopen.  $C$  is echter nog onbepaald. Uit wat volgt, valt evenwel in te zien, dat de waarden  $C = 0$  en  $C = A_1$  speciale aandacht verdienen, terwijl tevens zal blijken, op grond van welke overweging we de voorkeur aan een van deze twee waarden kunnen geven.

1°.  $C = 0$ . Hieruit volgt voor de oplossing:

$$\Omega(z) = 0 \quad (7.5) \quad \Theta = 0 \quad (7.6) \quad \zeta = \lambda(A_1 x + A_2 y) \quad (7.7)$$

(7.6) en (7.7) is echter juist de oplossing, die door (5.2) voor  $\Theta$  en door (5.5) voor  $\zeta$  (op een additieve constante na) wordt gegeven voor een homogeen windveld boven een afgesloten zee. Op grond van



de praktische overweging, dat iedere zee in feite begrensd is, zouden we dus tot (7.6) en (7.7) als meest plausibele oplossing kunnen besluiten.

2°. C = A<sub>1</sub>. Hiermee vinden we:

$$\Omega(z) = i A_1 z \quad (7.8) \quad \lambda \Theta = -A_1 y \quad (7.9) \quad \zeta = (\lambda A_2 - A_1) y \quad (7.10)$$

In plaats van te bedenken, dat een niet-begrensde zee niet voorkomt, is het evenzeer voor de hand liggend om te overwegen, dat een overal boven een half vlak homogeen windveld evenmin een praktisch voorkomend verschijnsel is, maar dat we ons beter een plaatselijk homogeen windveld kunnen denken tussen een gebied van hoge en een van lage druk. Daarom stellen we het windveld voor door twee singuliere circulaire windvelden met tegengestelde polariteit, die zich bevinden in  $z = RA$ , resp.  $z = -RA$ , waarin:  $A = -A_2 + i A_1$  en  $R$  een positieve parameter.

De sterkte zij  $\frac{1}{2} R|A|^2$ . Volgens (4.3) wordt een dergelijk windveld weergegeven door:

$$U = \frac{1}{2} R|A|^2 \ln \left| \frac{z-RA}{z+RA} \right|, \quad V=0 \quad (7.11)$$

Is nu  $|z| \ll R|A|$ , dan geldt:

$$U \approx -|A|^2 \operatorname{Re} \frac{z}{A} = -\operatorname{Re} \bar{A}z = A_2 x - A_1 y, \quad V=0 \quad (7.12)$$

Voor  $|z| \ll R|A|$  vinden we derhalve juist windpotentialen voor een homogeen windveld, en wel volgens (2.5), (2.6) en (4.2) met componenten  $W_1$  en  $W_2$ , zodat inderdaad tussen de circulaire windvelden een plaatselijk homogeen veld heerst. (Het gebied, waar het veld "quasi-homogeen" is kunnen we uitbreiden, door  $R$  zeer groot te nemen).

Uit de windpotentialen (7.11) vinden we voor  $\Omega(z)$ :

$$\Omega(z) = -\frac{1}{2} R|A|^2 \ln \frac{A}{\bar{A}} \cdot \frac{R\bar{A}-z}{RA+z} \quad (7.13)$$

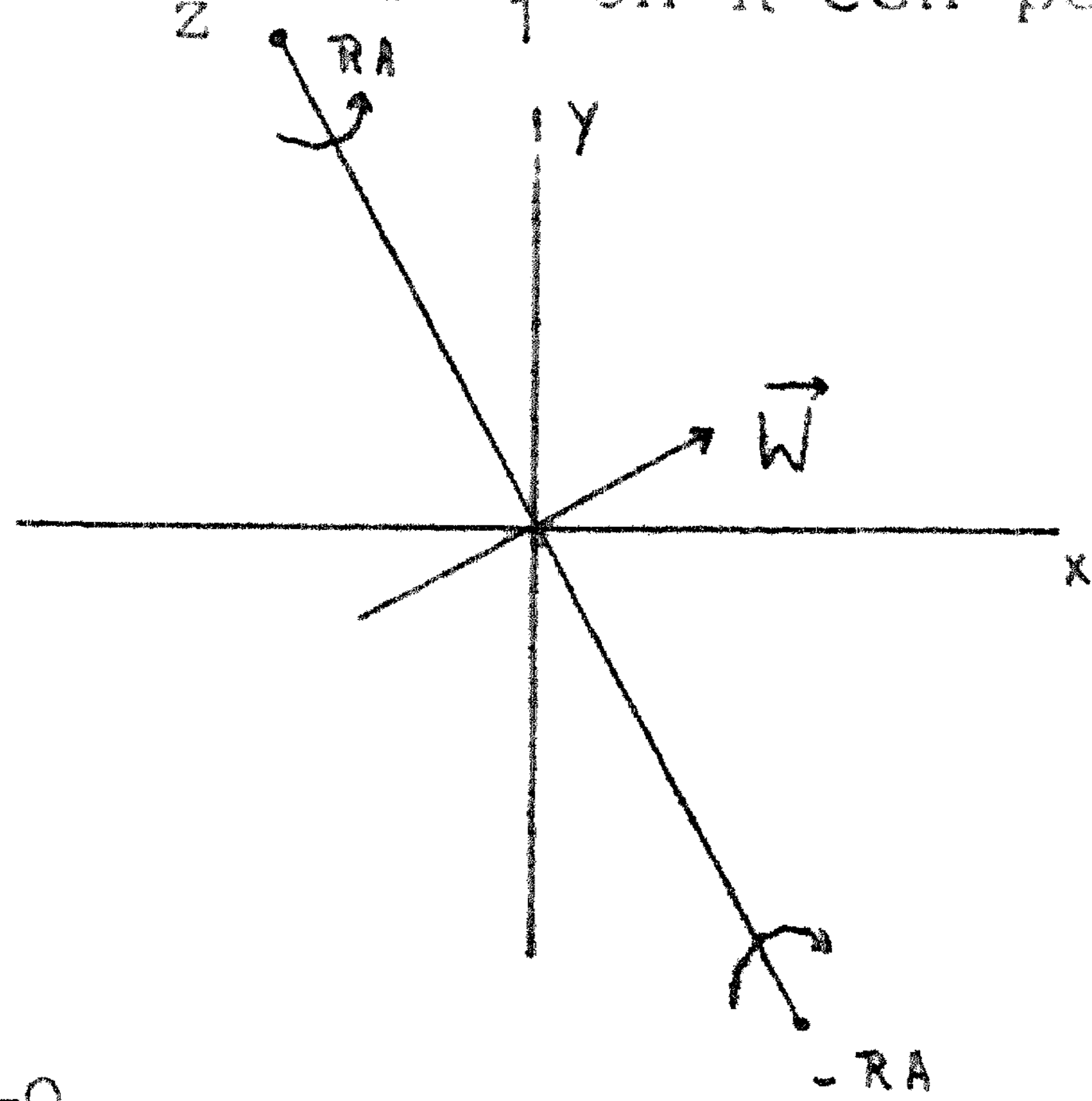
en dit levert voor  $|z| \ll R|A|$ :

$$\Omega(z) \approx \frac{1}{2} |A|^2 \cdot z \left( \frac{1}{\bar{A}} + \frac{1}{A} \right) = -A_2 z \quad (7.14)$$

Uit (7.14) en (7.12) volgt nu voor  $|z| \ll R|A|$ :

$$\lambda \Theta \approx -A_1 y, \quad \zeta \approx (\lambda A_2 - A_1) y \quad \text{dus juist (7.9) en (7.10).}$$

Is derhalve de zee groot ten opzichte van de afmetingen van het plaatselijk nagenoeg homogene deel van het quasi-homogene veld weergegeven door (7.11), dan verdienen (7.9) en (7.10) de voorkeur als meest plausibele oplossingen. We kunnen dan wel (7.1) nemen





voor de windpotentialen, maar moeten  $C = A_1$  kiezen in  $\Omega$ , dus (7.8).  
We gebruiken dit in 10.

8. Singulier circulair windveld boven een willekeurig gebied.  
Conforme afbeelding.

Het windveld zij gekarakteriseerd door de potentialen:

$$U = \ln |z - z_0|, \quad V = 0 \quad (8.1)$$

in overeenstemming met (4.3). Het gebied  $G$  met rand  $\Gamma$  zij willekeurig. Wanneer  $z_0$  niet in  $G$  ligt, vinden we uit (8.1):

$$\Omega(z) = - \ln (z - z_0) + iC \quad (8.2)$$

$$\text{en:} \quad \Theta = 0 \quad (8.3)$$

$$\zeta = \lambda \{ \text{Im} \ln (z - z_0) - C \} . \quad (8.4)$$

Ligt  $z_0$  wel in  $G$ , dan kan worden aangetoond, dat uit (8.1) voor de complexe potentiaal  $\Omega$  volgt:

$$\Omega(z) = - \ln \left\{ \frac{w(z) - \overline{w(z_0)}}{w(z) - w(z_0)} \cdot (z - z_0) \right\} + iC \quad (8.5)$$

waarin:

$iC$  is een vrije imaginaire constante,

$\overline{w(z_0)}$  is de complex geconjugeerde van  $w(z_0)$ , terwijl:

$w(z)$  is een in  $G$  analytische functie van  $z$ , die het gebied  $G$  in het  $z$ -vlak conform afbeeldt op het bovenste halve  $w$ -vlak ( $\text{Im } w > 0$ )

Deze functie kan onder zeer ruime voorwaarden voor  $G$  worden bepaald, terwijl eveneens onder ruime voorwaarden geldt, dat  $w(z)$  de rand  $\Gamma$  van  $G$  afbeeldt op de reële as in het  $w$ -vlak.

Enige voorbeelden.

1.  $G$  is een half vlak:  $\text{Im } z > 0$ . Dan kunnen we nemen:  $w = z$  en dat geldt volgens (8.5) voor  $z_0$  in  $G$ :

$$\Omega(z) = - \ln (z - \overline{z_0}) + iC,$$

in overeenstemming met (6.5). (Daar namen we  $z_0 = ia$  en  $C = \frac{\pi}{2}$ ).

2.  $G$  is een kwart vlak:  $\text{Im } z > 0, \text{ Re } z > 0$ . We nemen:  $w = z^2$ , dan geldt volgens (8.5) voor  $z_0$  in  $G$ :

$$\Omega(z) = - \ln \frac{(z - \overline{z_0})(z + \overline{z_0})}{z + z_0} + iC .$$



3. G is een cirkel:  $|z| < 1$ .

Voor de afbeeldingsfunctie nemen we:  $w = i \frac{1+z}{1-z}$  en vinden als  $z_0$  in G ligt:

$$\Omega(z) = - \ln \frac{1+z_0}{1+\bar{z}_0} - \ln (z\bar{z}_0 - 1) + iC.$$

4. G is een rechthoek:  $-1 < \operatorname{Re} z < +1$ ;  $0 < \operatorname{Im} z < a$ .

Dit gebied wordt conform afgebeeld op het halve vlak  $\operatorname{Im} w > 0$  door een der elliptische functies van Jacobi, nl.:  $w = \operatorname{sn}(Kz, k)$  waarin de modulus  $k$  wordt bepaald door:  $\frac{K'}{K} = a$ , terwijl  $K = K(k)$  en  $K' = K(k') = K(\sqrt{1-k^2})$  volledige elliptische integralen van de eerste soort zijn.

We vinden dus in dit geval:  $\Omega(z) = - \ln \left\{ \frac{\operatorname{sn} z - \operatorname{sn} \bar{z}_0}{\operatorname{sn} z - \operatorname{sn} z_0} \cdot (z - z_0) \right\} + iC.$

9. Een willekeurig windveld boven een willekeurig gebied.

Nadat we in 4. tot en met 8. speciale windvelden en/of speciale gebieden G hebben beschouwd, zullen we thans aangeven, wat de gedaante is van de oplossing bij willekeurige windpotentialen.

We moeten het volgende randwaardeprobleem voor  $\Omega$  oplossen: bepaal  $\Omega(z)$  zodanig, dat dit een analytische functie van  $z$  is in G, terwijl het reële deel van  $\Omega$  op de rand  $\Gamma$  van G voorgeschreven waarden aanneemt, nl. de waarden van  $-U$  op  $\Gamma$ .

Alvorens een willekeurig gebied te beschouwen, nemen we het geval:

a. G is een half vlak ( $\operatorname{Im} z > 0$ ).

De oplossing voor  $\Omega(z)$  wordt aangegeven door de volgende formule, die afkomstig is van Poisson en Schwarz:

$$\Omega(z) = - \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+\xi z}{(\xi-z)(1+\xi^2)} U(\xi, 0) d\xi. \quad (9.1)$$

Afhankelijk van de aard van  $U(x, 0)$  kunnen we deze formule dikwijls nog vereenvoudigen, daar uit (9.1) volgt:

$$\Omega(z) = - \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{\xi-z} - \frac{\xi}{1+\xi^2} \right) U(\xi, 0) d\xi, \quad (9.2)$$

en als het gedrag van  $U(x, 0)$  voor grote  $|x|$  zodanig is, dat we de integraal in (9.2) in twee integralen kunnen splitsen, kunnen we als oplossing nemen:

$$\Omega(z) = - \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(\xi, 0)}{\xi-z} d\xi, \quad (9.3)$$

daar de tweede integraal in (9.2) een imaginaire constante is, terwijl slechts het reële deel van  $\Omega$  is voorgeschreven voor  $\operatorname{Im} z = 0$ .



Voorbeeld:

Hiertoe nemen we windveld III uit 4.c:

$$U = - \frac{b^2}{2\{|z-ia|^2+b^2\}} , \quad V = 0, \quad \text{zodat } U(x,0) = \frac{b^2}{2(x^2+c^2)}$$

$$\text{als } c^2 = a^2 + b^2.$$

In dit geval mogen we (9.3) toepassen, en vinden derhalve:

$$\Omega(z) = \frac{b^2}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{(\xi-z)(\xi^2+c^2)}.$$

Na berekening van de integraal verkrijgen we als resultaat:

$$\Omega(z) = - \frac{b^2}{2ic(z+ic)}, \quad \text{zoals reeds vermeld in (6.13).}$$

b. G is willekeurig (rand  $\Gamma$ ).

In dit geval kan uit de formule van Poisson-Schwarz worden afgeleid, dat de oplossing voor  $\Omega(z)$  luidt:

$$\Omega(z) = - \frac{1}{\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{1+w(t) \overline{w(z)}}{\{w(t)-w(z)\} \{1+\overline{w^2(t)}\}} \cdot U(t) w'(t) dt, \quad (9.4)$$

waarin we integreren langs de rand van G, zodat met  $U(t)$  wordt bedoeld de waarden, die  $U(\operatorname{Re} t, \operatorname{Im} t)$  aanneemt op  $\Gamma$ . Verder is in (9.4)  $w(z)$  een analytische functie van  $z$ , die het gebied G in het  $z$ -vlak conform afbeeldt op het bovenste halve  $w$ -vlak ( $\operatorname{Im} w > 0$ ). Deze functie hebben we ook in (8.5) gebruikt.

Juist zoals we bij een half vlak naast (9.1) de eenvoudiger formule (9.3) hadden bij geschikt gedrag van  $U(x,0)$  voor grote  $|x|$ , geldt bij een willekeurig gebied, dat in plaats van (9.4) de volgende oplossing voor  $\Omega$  mag worden genomen:

$$\Omega(z) = - \frac{1}{\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{U(t)}{w(t)-w(z)} w'(t) dt, \quad (9.5)$$

mits het gedrag van  $U$  op  $\Gamma$  van dien aard is, dat de integraal in (9.5) bestaat.

Voorbeeld:

Hiertoe nemen we het geval, dat G de cirkel  $|z| < R$  is: de afbeeldingsfunctie is dan  $w(z) = i \frac{R+z}{R-z}$ , en uit (9.4) volgt na enig rekenen:

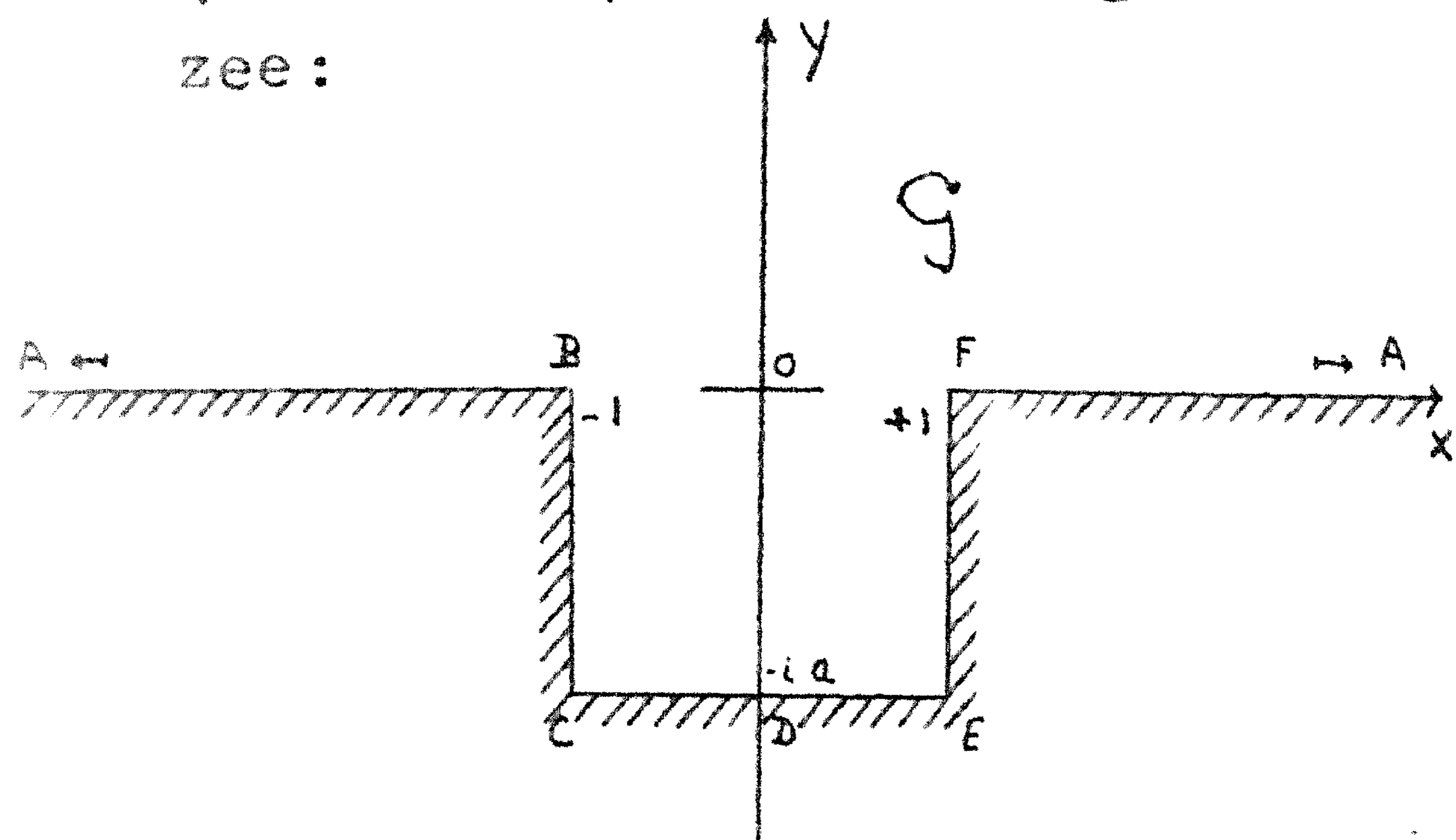
$$\Omega(z) = - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=R} \frac{t+z}{t-z} U(t) \frac{dt}{t} \quad (9.6)$$

(9.6) is de bekende integraalformule van Poisson-Schwarz voor een cirkel.



# 10. Homogeen windveld boven een zee met baai.

We zullen nu nog een geval beschouwen, dat speciaal op de Noordzee betrekking heeft. Voor  $G$  nemen we het gebied, dat Schalkwijk ([4], p.24) als model gebruikt voor de Atlantische Oceaan plus Noordzee:



$$-a < \text{Im } z < \infty \text{ voor } 0 \leq |\text{Re } z| < 1 (a > 0)$$

$$0 < \text{Im } z < \infty \text{ voor } 1 \leq |\text{Re } z| < \infty$$

(Schalkwijk neemt dan  $a = 4$  en een schaalfactor  $\frac{1}{2} L$ ).

Voor de windpotentialen van een homogeen windveld, nemen we juist als in 7.:

$$U = 0, V = -A_1 x - A_2 y,$$

waarin het verband tussen  $A_1$  en  $A_2$  en de (constante) componenten  $W_1$  en  $W_2$  van het windveld, wordt gegeven door (4.2).

Het valt te verwachten, dat de aanwezigheid van de baai zich zal kenmerken door een storing in de oplossing voor een homogeen windveld boven een half vlak, welk geval in 7. is beschouwd, doch dat deze storing op grote afstand van de baai nauwelijks meer merkbaar zal zijn. M.a.w.: voor grote  $|z|$  moet de oplossing voor de complexe potentiaal  $\Omega$  bij een half vlak met baai naderen tot de oplossing voor  $\Omega$  bij een half vlak alleen.

Zodat  $\Omega(z)$  voor de oceaan met baai volgens (7.2) voor grote  $|z|$  moet naderen tot:  $\Omega_\infty(z) = i Cz$  ( $C$  reëel) (10.1)

Er kan nu worden afgeleid, dat de oplossing voor  $\Omega(z)$  luidt:

$$\Omega(z) = \frac{iC}{\gamma} s(z), \quad (\gamma \text{ en } C \text{ reëel}) \quad (10.2)$$

als de functie  $s(z)$  voldoet aan de volgende voorwaarden:

1°.  $s(z)$  beeldt  $G$  conform af op het halve vlak  $\text{Im } s > 0$

2°. voor grote  $|z|$  geldt:  $s = \gamma z \left\{ 1 + O(z^{-1}) \right\}$  (10.3)

3°.  $s(-1) = -1$ ,  $s(-ia) = 0$ ,  $s(+1) = +1$  (10.4)

De bepaling van de functie  $s(z)$ , die aan bovengenoemde eisen voldoet, is uitvoerig beschreven in TW 22. We geven hier slechts het resultaat:

$s$  wordt impliciet als functie van  $z$  gegeven door de formules:

$$\begin{cases} z = \frac{1}{E(k')} \left\{ \text{zn}(t, k) - \frac{K(k) - E(k)}{K(k)} t \right\} - 1 \\ s = -\text{dn}(t, k) \end{cases} \quad (10.5)$$

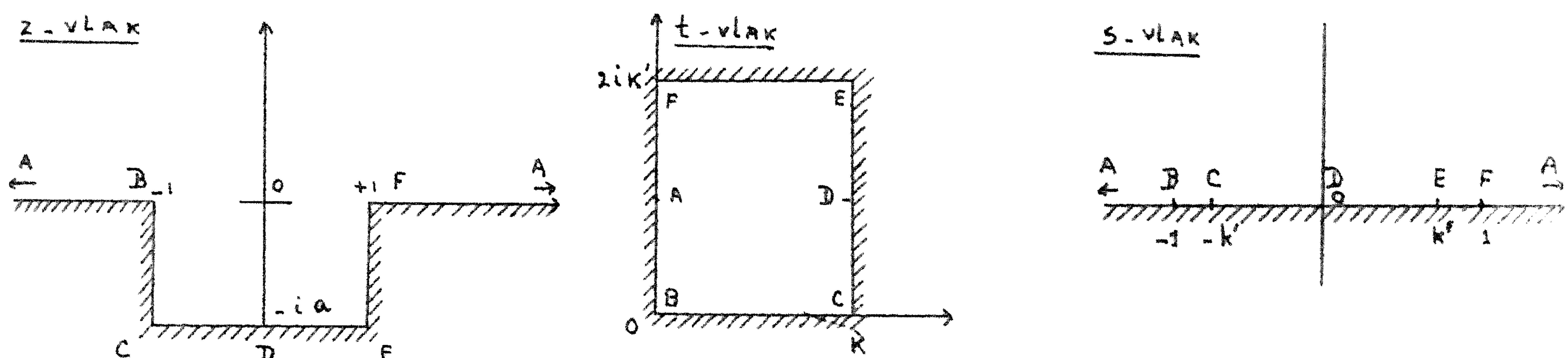


$$\text{terwijl: } \frac{K(k) - E(k)}{E(k')} = a \quad (10.7)$$

Hierin is:  $z\eta(t, k)$  de zg. zêta-functie van Jacobi, met modulus  $k$   
 $dn(t, k)$  de zg. delta-amplitudinis, een der elliptische functies van Jacobi, met modulus  $k$   
 $k' = \sqrt{1 - k^2}$   
 $K(k)$  resp.  $E(k)$  de volledige elliptische integraal van de eerste, resp. tweede soort met modulus  $k$ .

(10.7) bepaalt voor iedere positieve  $a$  eenduidig de modulus  $k$ .  
 $s$  kan niet expliciet in  $z$  worden uitgedrukt, doch de afbeelding van  $G$  op het halve vlak  $\text{Im } s > 0$  wordt door (10.5) en (10.6) gegeven via de hulpvariabele  $t$ :  
 door (10.5) wordt de rechthoek  $0 < \text{Re } t < K(k); 0 < \text{Im } t < 2K(k')$  in het  $t$ -vlak, conform afgebeeld op  $G$  in het  $z$ -vlak, terwijl door (10.6) dezelfde rechthoek in het  $t$ -vlak wordt afgebeeld op het bovenste halve  $s$ -vlak.

Bij deze afbeeldingen wordt de correspondentie tussen verschillende bijzondere punten gegeven door de volgende figuren:



In den vervolge laten we de modulus  $k$  of  $k'$  in het argument der verschillende functies weg.

Voor grote  $z$  volgt uit (10.5) en (10.6):

$$s = E' z \left\{ 1 + O(z^{-2}) \right\}, \text{ dus}$$

volgens (10.3) is  $\chi = E'$  en als oplossing voor  $\Omega(z)$  vinden we met (10.2) derhalve:

$$\Omega(z) = \frac{iC}{E'} s(z). \quad (10.8)$$

Om de waarde van  $\Omega$  in een punt  $z$  te vinden, moeten we natuurlijk eerst uit (10.5) de bijbehorende waarde van  $t$  oplossen, waarna  $s$  uit (10.6) volgt. Substitueren we (10.6) in (10.8), dan geeft het resultaat tezamen met (10.5) een parameteraanpak voor  $\Omega(z)$  met  $t$  als parameter.

We nemen nu voor  $C$  de waarde  $A_1$  op grond van de overwegingen in 7. en vinden dan voor de functie  $\Omega + U + iV$ , waardoor volgens (2.18) en (2.19) de fysische grootheden zijn bepaald:

$$\Omega + U + iV = \frac{iA_1}{E'} s(z) - i(A_1 x + A_2 y). \quad (10.9)$$



Hieruit vinden we voor  $\Theta$  en  $\zeta$  :

$$\Theta = - \frac{A_1}{\lambda E'} \operatorname{Im} s(z) \quad (10.10)$$

$$\zeta = - \frac{A_1}{E'} \operatorname{Im} s(z) - \frac{\lambda A_1}{E'} \operatorname{Re} s(z) + \lambda (A_1 x + A_2 y) \quad (10.11)$$

Met inachtnaam van (4.2) vinden we voor  $\zeta$  langs  $\Gamma$  ( $\Gamma$  is ABCDEFA in de figuur voor G):  $\zeta(\Gamma) = \frac{W_1}{\rho g H} \left\{ x - \frac{1}{E'} \operatorname{Re} s(z) \right\} + \frac{W_2}{\rho g H} y \quad (10.12)$

In de bijzondere punten van  $\Gamma$  (A, B, ... tot en met A) vinden we in het speciale geval  $a = 4$ :

$$\zeta_A = 0$$

$$\zeta_B = - \frac{W_1}{\rho g H} \left( 1 - \frac{1}{E'} \right)$$

$$\zeta_C = - \frac{W_1}{\rho g H} \left( 1 - \frac{k'}{E'} \right) - \frac{4 W_2}{\rho g H}$$

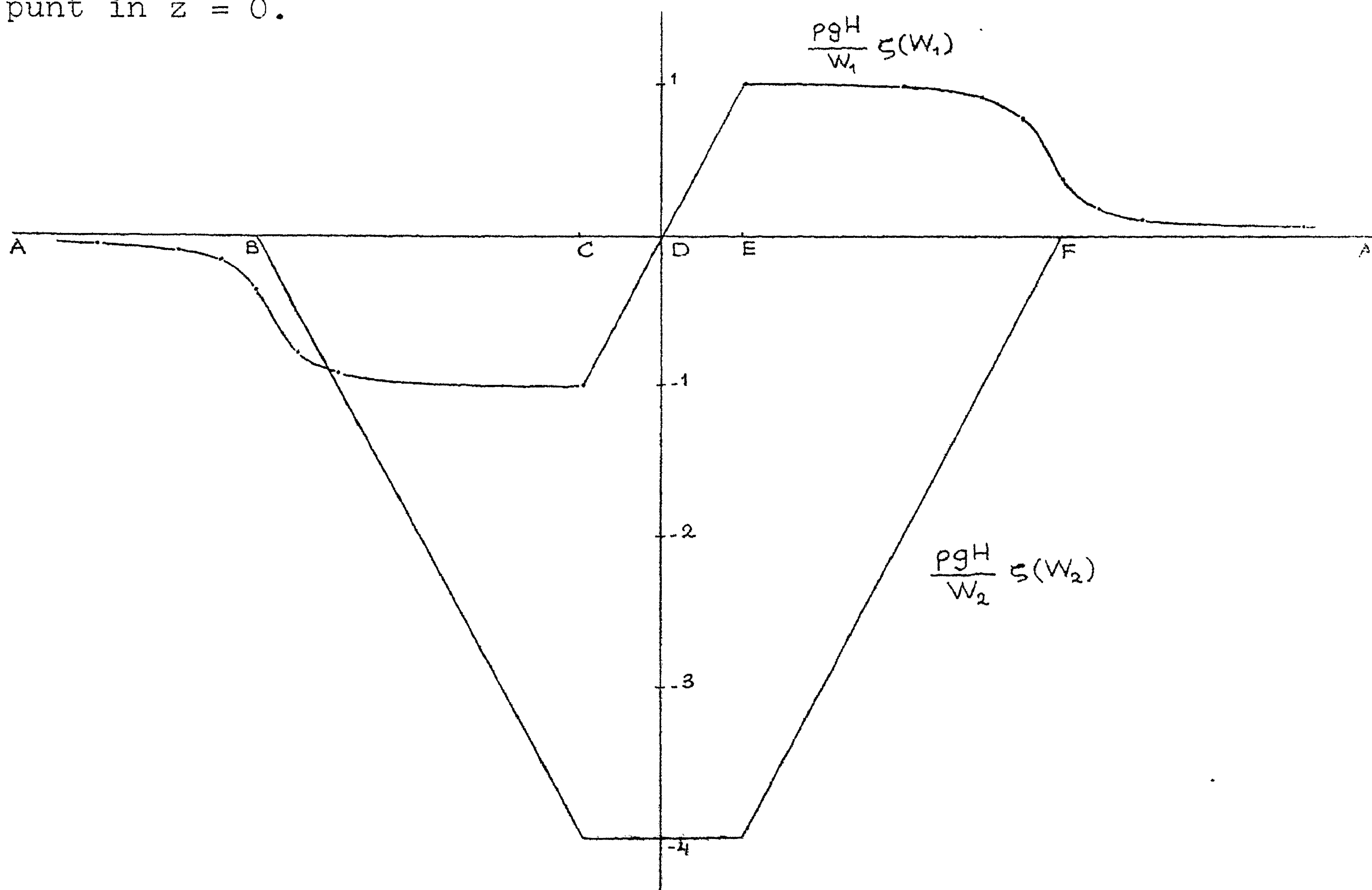
$$\zeta_D = - \frac{4 W_2}{\rho g H}$$

$$\zeta_E = \frac{W_1}{\rho g H} \left( 1 - \frac{k'}{E'} \right) - \frac{4 W_2}{\rho g H}$$

$$\zeta_F = \frac{W_1}{\rho g H} \left( 1 - \frac{1}{E'} \right)$$

Voor  $a = 4$  volgt uit (10.7):  $k' \approx 3 \cdot 10^{-3}$ , zodat  $E' \approx \frac{\pi}{2}$ , en we vinden derhalve, dat langs de "Zuidkust" CE van de baai in zeer goede benadering geldt:  $\zeta = \frac{1}{\rho g H} (W_1 x - 4 W_2)$  (10.13)

Dit is volgens (5.5) de oplossing voor de gesloten zee met zwaartepunt in  $z = 0$ .



Windeffect langs de kust tengevolge van de windcomponenten  $W_1$ , resp.  $W_2$  ( $a = 4$ ).



# 11. Vergelijking van de resultaten uit 10. met die van Schalkwijk.

Schalkwijk ([4], § 3a) behandelt het in 10. beschouwde probleem van een homogeen windveld boven een oceaan met baai van constante diepte met een benaderingsmethode. Hij gaat daarbij uit van de veronderstelling, dat het zeeniveau in de punten B en F van onze figuur niet zal veranderen, dus:  $\zeta_B = 0$ ,  $\zeta_F = 0$ . In plaats van deze voorwaarde is in dit rapport in 7. aangetoond, op grond van welke overweging we komen tot de waarde  $C = A_1$  voor de vrije constante in  $\Omega(z)$  (10.8).

Algemeen volgt uit (10.8) echter:

$$\zeta(x,y) = \lambda(A_1 x + A_2 y) - \frac{C}{E'} \operatorname{Im} s(z) - \frac{\lambda C}{E'} \operatorname{Re} s(z), \text{ dus:}$$

$$\zeta(\pm 1, 0) = \pm A_1 \lambda \mp \frac{\lambda C}{E'}.$$

Nemen wij dus de voorwaarde van Schalkwijk over, dan vinden we voor C de waarde  $C = E' A_1$  en dus voor  $\Omega_\infty(z)$  volgens (10.1):

$$\Omega_\infty(z) = i E' A_1 z \quad (11.1)$$

Omdat de waarde van  $E'$  echter van de afmetingen van de baai afhangt, ( $E' = E(k')$  en  $k'$  hangt volgens (10.7) af van  $a$ ) is het resultaat (11.1) in strijd met het (ook door Schalkwijk gehuldigde) uitgangspunt dat de stroming tengevolge van de aanwezigheid van de baai slechts tot op beperkte afstand van de baai merkbaar zal zijn.

De door Schalkwijk gebruikte voorwaarde moet dientengevolge als onjuist worden gekenmerkt, en vervangen worden door de voorwaarde, dat de stroming in het oneindige nadert tot de reeds bekende stroming in een oceaan zonder baai. (Schalkwijk neemt van de stroming op grote afstand van de baai slechts aan, dat de stroomlijnen evenwijdig lopen aan de kust, wat neerkomt op de aanname (10.1) met onbepaalde C).

Vergelijken we het resultaat van Schalkwijk voor  $\zeta$  langs de Zuidkust met (10.13), dan blijken deze uitkomsten overeen te stemmen. (Aan (10.13) moet voor vergelijking met Schalkwijk nog een schaafactor  $\frac{1}{2} L$  worden toegevoegd).

Dit voor de praktijk belangrijke resultaat van Schalkwijk wordt dus bevestigd.



Deel II: Stationaire windvelden boven een zee, bestaande uit meerdere delen met elk constante, maar onderling verschillende diepte.

## 12. Inleiding.

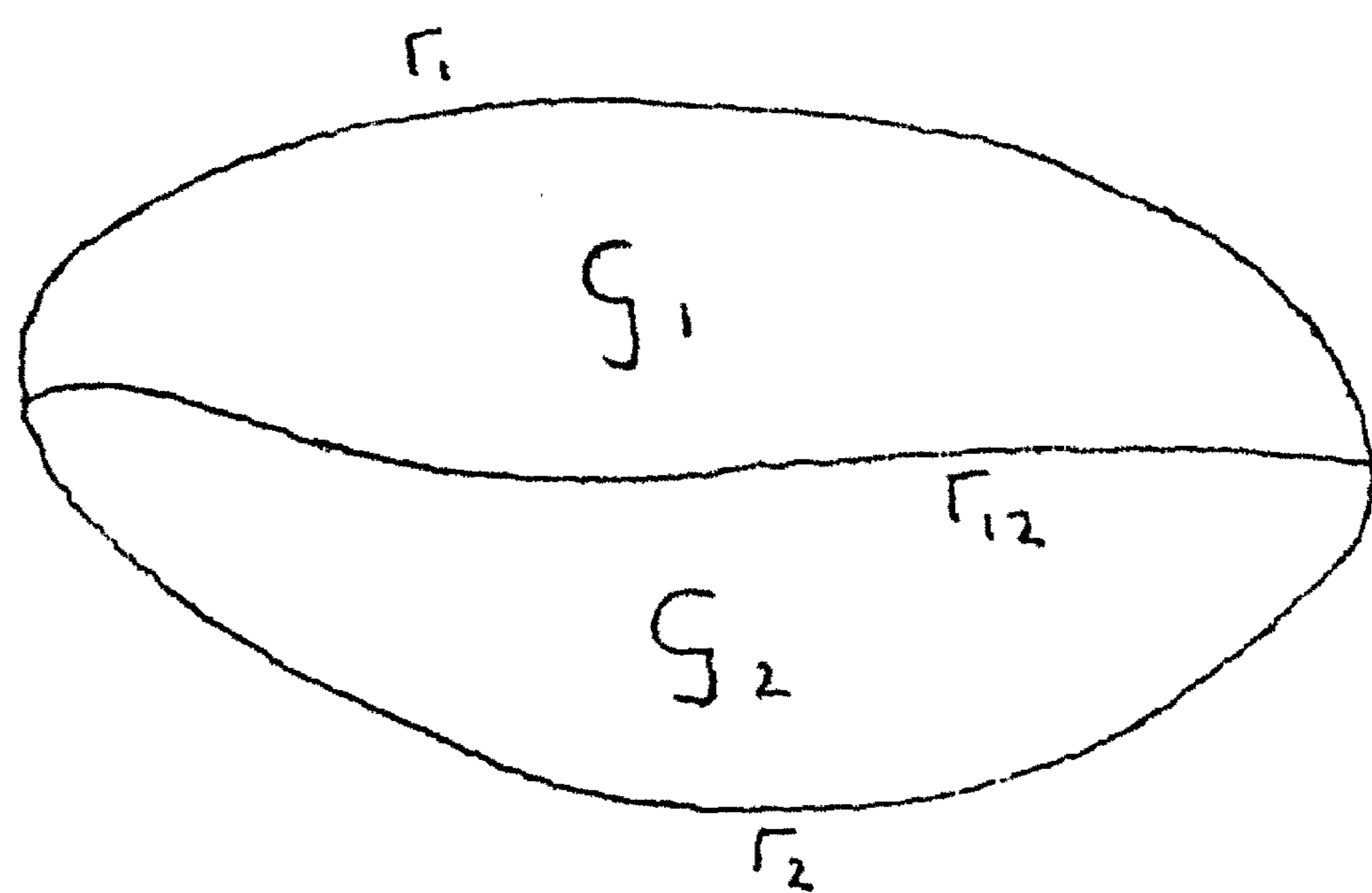
We nemen in dit deel aan, dat het gebied  $G$ , dat door het zeeoppervlak in het  $x,y$ -vlak wordt ingenomen, bestaat uit verschillende deelgebieden, in ieder waarvan de zee een constante diepte heeft, terwijl deze diepten voor verschillende deelgebieden verschillend zijn.

Deze voorstelling van een zee, waarbij de zeebodem dus bestaat uit een aantal horizontale vlakken, verbonden door verticale discontinuïteitsvlakken, die zich op het  $x,y$ -vlak projecteren als scheidingskrommen tussen verschillende deelgebieden, geeft uiteraard slechts een ruw beeld van de werkelijkheid. Als eerste benadering voor het geval, dat twee of meer zeën, met ieder nagenoeg constante diepte, worden verbonden door een gebied met sterke bodemhelling, is het gekozen beeld echter zinvol, te meer daar met dit model langs exacte weg een inzicht kan worden verkregen in verschillende verschijnselen, die bij overall constante diepte niet optreden, en dus in deel I niet tot uitdrukking kwamen.

In TW 24 is de theoretische opzet gegeven voor een willekeurig eindig aantal deelgebieden, doch in dit overzicht beperken we ons tot het geval, dat  $G$  bestaat uit twee deelgebieden  $G_1$  en  $G_2$ , daar juist dit geval voor ons interessant is, terwijl alleen op deze mogelijkheid dieper is ingegaan.

De rand van  $G$  noemen we weer  $\Gamma$ .

De delen van de rand van  $G_1$ , resp.  $G_2$ , die ook behoren tot  $\Gamma$ , noemen we  $\Gamma_1$ , resp.  $\Gamma_2$ . De gemeenschappelijke rand van  $G_1$  en  $G_2$  zij  $\Gamma_{12}$ .



## 13. Invoering der potentialen; rand- en overgangsvoorwaarden; eenduidigheid.

Ook nu baseren we ons op de vergelijkingen van Schalkwijk: (2.1) en (2.2), waarop langs analoge weg wordt voortgebouwd, als in 2. is geschied.

Daar de diepte in  $G_1$  en  $G_2$  afzonderlijk constant is, en wel resp.  $H_1$  en  $H_2$ , gelden de vergelijkingen in het inwendige van  $G_1$ , resp.  $G_2$ . Zij  $\lambda_1 = \frac{D}{4\pi H_1}$  en  $\lambda_2 = \frac{D}{4\pi H_2}$ , dan geeft volgens (2.2), (2.3) en (2.4) in  $G_k$  ( $k = 1, 2$ ):



$$-1 S_2 + \lambda_k -1 S_1 = \frac{W_1}{\rho} - g H_k \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (13.1)$$

$$-1 S_1 + \lambda_k -1 S_2 = \frac{W_2}{\rho} - g H_k \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (13.2)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial y} = 0 \quad (13.3)$$

De definitie van de windpotentialen  $U(x,y)$  en  $V(x,y)$ , gegeven in (2.5) en (2.6), blijft onveranderd geldig, daar hierin slechts van de diepte onafhankelijke grootheden optreden.

(We nemen dus aan, dat ook de "Ekman-wrijvingsdiepte"  $D$  niet afhankelijk is van de diepte, wat hoogstens in eerste benadering juist is).

De definitie van de stroomfunctie  $\Theta(x,y)$  volgens (2.9) en (2.10) kunnen we niet zonder meer overnemen, daar  $S_1$  en  $S_2$  in het algemeen niet overal in  $G = G_1 + G_2$  continu differentieerbaar zijn ( $\vec{S}$ , d.i. de vector met componenten  $S_1$  en  $S_2$ , behoeft op  $\Gamma_{12}$  niet continu te zijn; wel is het fysisch plausibel om aan te nemen, dat de normale component van  $\vec{S}$  op  $\Gamma_{12}$  continu is).

Er kan evenwel worden aangetoond, dat als  $S_1$  en  $S_2$  voldoen aan (13.3) in  $G_1 + G_2$ , terwijl:

1°. op  $\Gamma_1$  en  $\Gamma_2$  geldt:  $S_n = 0$  ( $S_n$  is de normale component van  $\vec{S}$ ) (Dit eisten we ook in 3., immers  $\Gamma_1$  en  $\Gamma_2$  worden gevormd door de kust, en moeten daarom stroomlijnen zijn).

2°. langs  $\Gamma_{12}$  geldt:  $S_n$  is continu (overgangsvoorwaarde), dan bestaat weer in  $G + \Gamma$  een stroomfunctie  $\Theta(x,y)$ , waarvoor in  $G_1 + \Gamma_1 + \Gamma_{12}$ , resp.  $G_2 + \Gamma_2 + \Gamma_{12}$  geldt:

$$-1 S_1 = - \frac{gD}{4\pi} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \quad (13.4)$$

$$-1 S_2 = \frac{gD}{4\pi} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \quad (13.5)$$

Ter voorkoming van misverstand, zij er hier ten overvloede op gewezen, dat de indices 1 en 2 bij  $S$  en  $W$  betrekking hebben op de  $x$ -, resp.  $y$ -component van deze grootheden, terwijl bij de overige grootheden:  $\lambda_k$ ,  $\Omega_k$ ,  $\Phi_k$  en  $\Psi_k$  deze indices aanduiden in welk der gebieden  $G_k$  de betreffende grootheid is gedefinieerd.

Aan (13.3) is na invoering van de stroomfunctie weer steeds voldaan. Op dezelfde manier als in 2., kan nu na invoering van windpotentialen en stroomfunctie, uit (13.1) en (13.2) worden afgeleid, dat er complexe functies

$$\Omega_k(z) = \Phi_k(x,y) + -1 \Psi_k(x,y) \quad (k = 1,2) \quad (13.6)$$

van  $z = x+iy$  bestaan, die analytisch zijn in  $G_k$ , en waarvoor in



$G_k + \Gamma_k + \Gamma_{12}$  geldt:

$$\Theta = \lambda_k^{-1} (\Phi_k + U) \quad (13.7)$$

$$\zeta = \Phi_k + U - \lambda_k (\Psi_k + V) . \quad (13.8)$$

In 3. hadden we voor  $\Omega(z)$  alleen een randvoorwaarde; in dit geval krijgen we voor  $\Omega_1(z)$  resp.  $\Omega_2(z)$  randvoorwaarden langs  $\Gamma_1$  resp.  $\Gamma_2$ , en aansluitvoorwaarden langs  $\Gamma_{12}$ , die als volgt worden afgeleid.

Op fysische grond eisen we langs  $\Gamma_{12}$ :

1. De normale stroomcomponent  $S_n$  is continu. (Dit is reeds gebruikt om de definitie van een stroomfunctie mogelijk te maken).
2.  $\zeta(x,y)$  (het windeffect) is continu.

De randvoorwaarde langs  $\Gamma_1$ , resp.  $\Gamma_2$  blijft natuurlijk:  $\Gamma_1$ , resp.  $\Gamma_2$  is een stroomlijn.

Wanneer we deze voorwaarden uitdrukken in voorwaarden voor  $\Phi_k$  en  $\Psi_k$  (en daarmee in voorwaarden voor  $\Omega_k$ , immers:  $\Phi_k = \text{Re } \Omega_k$ ,  $\Psi_k = \text{Im } \Omega_k$ ), krijgen we als resultaat:

Randvoorwaarden:

$$\text{langs } \Gamma_1 \text{ geldt: } \Phi_1 = -U \quad (13.9)$$

$$\text{langs } \Gamma_2 \text{ geldt: } \Phi_2 = -U . \quad (13.10)$$

Aansluitvoorwaarden:

langs  $\Gamma_{12}$  geldt:

$$1^\circ. \quad \lambda_1^{-1} (\Phi_1 + U) = \lambda_2^{-1} (\Phi_2 + U) \text{ (dit volgt uit: } S_n \text{ continu)} \quad (13.11)$$

$$2^\circ. \quad \Phi_1 - \lambda_1 (\Psi_1 + V) = \Phi_2 - \lambda_2 (\Psi_2 + V) \text{ (dit volgt uit: } \zeta \text{ continu)} \quad (13.12)$$

Men kan nu de volgende stelling bewijzen:

Door de eis, dat  $\Omega_1(z)$ , resp.  $\Omega_2(z)$  analytisch is in  $G_1$ , resp.  $G_2$ , tezamen met de randvoorwaarden (13.9) en (13.10) en de aansluitvoorwaarden (13.11) en (13.12) worden de functies  $\Omega_1(z)$  en  $\Omega_2(z)$  bij gegeven  $U(x,y)$  en  $V(x,y)$  op additieve constanten na eenduidig bepaald, terwijl de functies  $\Theta(x,y)$  en  $\zeta(x,y)$  dan in  $G + \Gamma$ , eveneens op additieve constanten na, eenduidig zijn bepaald.

Zijn niet de windpotentialen  $U$  en  $V$ , maar de componenten  $W_1$  en  $W_2$  van het windveld gegeven, dan geldt voor  $\Theta(x,y)$  en  $\zeta(x,y)$  dezelfde stelling.



De vrije constante in  $\Theta$  kunnen we bepalen door de eis:

$$\Theta = 0 \text{ op } \Gamma, \quad (13.13)$$

en de additieve constante in  $\zeta$  bij een begrensde gebied  $G$  door:

$$\iint_G \zeta \, d\sigma = 0, \quad (13.14)$$

of door de waarde van  $\zeta$  in zeker punt van  $G$  voor te schrijven.

Resumerend geldt dus:

Zowel bij gegeven windveld zelf, als bij gegeven windpotentialen, zijn de fysische grootheden  $\zeta$ ,  $S_1$  en  $S_2$  in een begrensde gebied overal in  $G$  eenduidig bepaald door de eis, dat  $\Omega_1$ , resp.  $\Omega_2$  analytisch is in  $G_1$  resp.  $G_2$ , tezamen met de randvoorwaarden (13.9) en (13.10), de aansluitvoorwaarden (13.11) en (13.12), en de bijvoorwaarden (13.13) en (13.14).

Is  $G$  niet begrensd, dan kunnen de meeste van de bovengenoemde resultaten zonder meer worden gegeneraliseerd, waarbij ten aanzien van de eenduidigheid dezelfde restricties moeten worden gemaakt als in 3.

#### 14. Reductie van het probleem tot een integraalvergelijking.

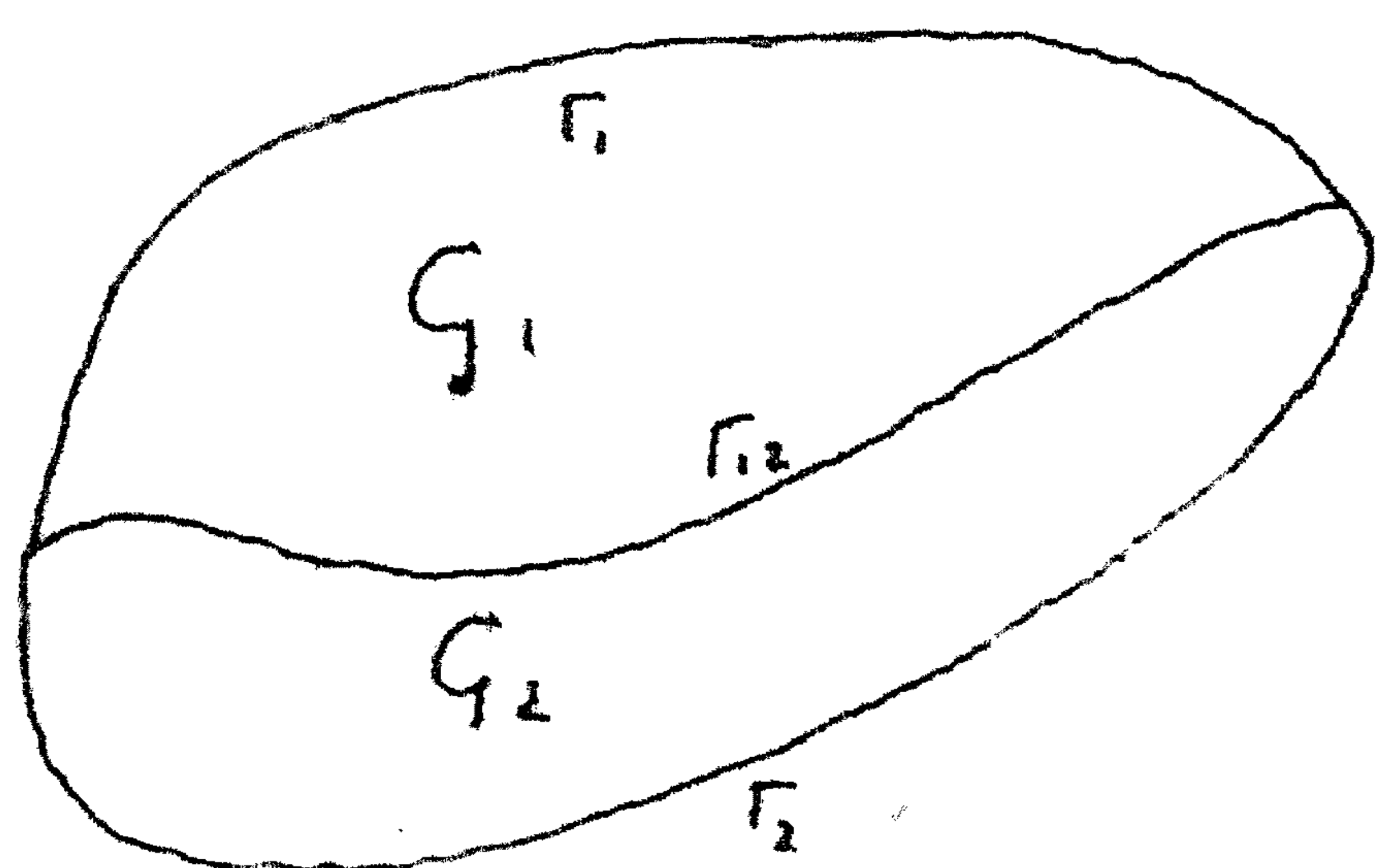
We schrijven nogmaals de rand- en aansluitvoorwaarden op:

$$\Gamma_1: \Phi_1 = -U \quad (14.1)$$

$$\Gamma_2: \Phi_2 = -U \quad (14.2)$$

$$\Gamma_{12}: \lambda_1^{-1}(\Phi_1 + U) = \lambda_2^{-1}(\Phi_2 + U) \quad (14.3)$$

$$\Phi_1 - \lambda_1(\Psi_1 + V) = \Phi_2 - \lambda_2(\Psi_2 + V), \quad (14.4)$$



en voeren nu in de functies  $\Lambda_1(z)$ , resp.  $\Lambda_2(z)$ , analytisch in  $G_1$  resp.  $G_2$ , die voldoen aan de randvoorwaarden:

$$\operatorname{Re} \Lambda_k = -U \text{ op } \Gamma_k + \Gamma_{12} \quad (k = 1, 2) \quad (14.5)$$

(De bepaling van deze functies kan geschieden op de in 9. uiteenzette manier).

$$\text{We noemen nu: } \Omega_k^*(z) = \Omega_k(z) - \Lambda_k(z) \quad (k = 1, 2) \quad (14.6)$$

met:  $\Omega_k^*(z) = \Phi_k^*(x, y) + i \Psi_k^*(x, y)$ ; met behulp van (14.1) tot en met (14.4) krijgen we dan het volgende probleem voor  $\Omega_1^*$  en  $\Omega_2^*$ :

$\Omega_1^*(z)$  resp.  $\Omega_2^*(z)$  moet analytisch zijn in  $G_1$  resp.  $G_2$ , en voldoen aan de volgende rand- en aansluitvoorwaarden:



$$\Gamma_1: \bar{\Phi}_1^* = 0 \quad (14.7)$$

$$\Gamma_2: \bar{\Phi}_2^* = 0 \quad (14.8)$$

$$\Gamma_{12}: \begin{cases} \lambda_1^{-1} \bar{\Phi}_1^* = \lambda_2^{-1} \bar{\Phi}_2^* \\ \bar{\Phi}_1^* - \lambda_1 (\psi_1^* + V + \text{Im } \Lambda_1) = \bar{\Phi}_2^* - \lambda_2 (\psi_2^* + V + \text{Im } \Lambda_2) \end{cases} \quad (14.9)$$

$$\bar{\Phi}_1^* - \lambda_1 (\psi_1^* + V + \text{Im } \Lambda_1) = \bar{\Phi}_2^* - \lambda_2 (\psi_2^* + V + \text{Im } \Lambda_2) \quad (14.10)$$

Dit probleem kan gereduceerd worden tot een zg. singuliere integraalvergelijking. We gaan hier niet nader op in, omdat geen toepassing van deze reductie wordt gegeven, doch verwijzen naar TW 24. Hier is slechts het resultaat vermeld: Stel dat op  $\Gamma_{12}$  geldt:  $\bar{\Phi}_1^* = \lambda_1 \varphi(z)$ ,  $\bar{\Phi}_2^* = \lambda_2 \varphi(z)$ . (Dat dit altijd mogelijk is, blijkt uit (14.9)). De reële functie  $\varphi(z)$  (die alleen op  $\Gamma_{12}$  gedefinieerd is) voldoet dan aan de volgende integraalvergelijking, geldig voor  $z_0$  op  $\Gamma_{12}$ :

$$\begin{aligned} (\lambda_2 - \lambda_1) \varphi(z_0) - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_{12}} \left[ \frac{\lambda_1^2 w_1'(t)}{w_1(t) - w_1(z_0)} + \frac{\lambda_2^2 w_2'(t)}{w_2(t) - w_2(z_0)} \right] \varphi(t) dt = \\ = \lambda_2 \text{Im } \Lambda_2(z_0) - \lambda_1 \text{Im } \Lambda_1(z_0) + (\lambda_2 - \lambda_1) V(z_0) + C \end{aligned} \quad (14.11)$$

Hierin is:

$w_1(z)$ , resp.  $w_2(z)$  een analytische functie van  $z$ , die  $G_1$  resp.  $G_2$  conform afbeeldt op het bovenste halve  $w$ -vlak ( $\text{Im } w > 0$ ).

15. Het geval, dat de diepten in  $G_1$  en  $G_2$  sterk verschillend zijn; een iteratie-methode ter oplossing van het probleem.

We beschouwen het probleem ter bepaling van  $\Omega_1(z)$  en  $\Omega_2(z)$  nog eens, nu voor het speciale geval, dat de diepte  $H_1$  in  $G_1$  groot is ten opzichte van de diepte  $H_2$  in  $G_2$ .

Dan geldt derhalve, dat  $\varepsilon = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \ll 1$  (15.1)

Na invoering van  $\varepsilon$ , kunnen we de aansluitvoorwaarden (14.3) en (14.4) als volgt schrijven:

$$\text{langs } \Gamma_{12} \text{ geldt } \begin{cases} \bar{\Phi}_1 + U = \varepsilon (\bar{\Phi}_2 + U) \\ \bar{\Phi}_2 + U - \lambda_2 (\psi_2 + V) = \bar{\Phi}_1 + U - \varepsilon \lambda_2 (\psi_1 + V) \end{cases}$$

We stellen nu:  $\lambda_2' = \frac{\lambda_2}{1 - \varepsilon}$ , (15.2)

dan gaan de rand- en aansluitvoorwaarden over in:

$$\begin{cases} \Gamma_1: \bar{\Phi}_1 = -U \end{cases} \quad (15.3)$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}: \bar{\Phi}_1 = -U + \varepsilon (\bar{\Phi}_2 + U) \end{cases} \quad (15.4)$$

$$\begin{cases} \Gamma_2: \bar{\Phi}_2 = -U \end{cases} \quad (15.5)$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}: \bar{\Phi}_2 - \lambda_2' \psi_2 = -U + \lambda_2' V - \varepsilon \lambda_2' (\psi_1 + V) \end{cases} \quad (15.6)$$



Dit probleem lossen we op met behulp van successieve approximatie, door te stellen:  $\Omega_1(z) = \Omega_1^{(0)}(z) + \varepsilon \Omega_1^{(1)}(z) + \varepsilon^2 \Omega_1^{(2)}(z) + \dots$  (15.7)

$$\Omega_2(z) = \Omega_2^{(0)}(z) + \varepsilon \Omega_2^{(1)}(z) + \varepsilon^2 \Omega_2^{(2)}(z) + \dots \quad (15.8)$$

We vinden voor de functies  $\Omega_1^{(m)}(z)$  en  $\Omega_2^{(m)}(z)$  ( $m=0,1,\dots$ ) dan de volgende randvoorwaarden:

$$\Omega_1^{(0)}(z): \begin{cases} \Gamma_1 : \Phi_1^{(0)} = -U \\ \Gamma_{12} : \Phi_1^{(0)} = -U \end{cases} \quad (15.9a) \quad \Omega_2^{(0)}(z): \begin{cases} \Gamma_2 : \Phi_2^{(0)} = -U \\ \Gamma_{12} : \Phi_2^{(0)} - \lambda_2' \psi_2^{(0)} = -U + \lambda_2' V \end{cases} \quad (15.10a)$$

$$\Omega_1^{(1)}(z): \begin{cases} \Gamma_1 : \Phi_1^{(1)} = 0 \\ \Gamma_{12} : \Phi_1^{(1)} = \Phi_2^{(0)} + U \end{cases} \quad (15.9b) \quad \Omega_2^{(1)}(z): \begin{cases} \Gamma_2 : \Phi_2^{(1)} = 0 \\ \Gamma_{12} : \Phi_2^{(1)} - \lambda_2' \psi_2^{(1)} = -\lambda_2' (\psi_1^{(0)} + V) \end{cases} \quad (15.10b)$$

en voor  $m \geq 2$ :

$$\Omega_1^{(m)}(z): \begin{cases} \Gamma_1 : \Phi_1^{(m)} = 0 \\ \Gamma_{12} : \Phi_1^{(m)} = \Phi_2^{(m-1)} \end{cases} \quad (15.9c) \quad \Omega_2^{(m)}(z): \begin{cases} \Gamma_2 : \Phi_2^{(m)} = 0 \\ \Gamma_{12} : \Phi_2^{(m)} - \lambda_2' \psi_2^{(m)} = -\lambda_2' \psi_1^{(m-1)} \end{cases} \quad (15.10c)$$

Op deze wijze kunnen successievelijk de verschillende functies in (15.7) en (15.8) worden bepaald. Het essentiële van deze methode is, dat het oorspronkelijke probleem, dat twee in verschillende gebieden gedefinieerde functies bevatte, waarvoor rand- en overgangsvoorwaarden waren gegeven, is teruggebracht tot een aantal problemen, waarin steeds slechts één onbekende functie optreedt, waarvoor uitsluitend randvoorwaarden zijn gegeven.

Is  $\varepsilon$  zeer klein, dan is  $\lambda_2' \approx \lambda_2$  en voor de randvoorwaarden voor  $\Omega_1^{(0)}(z)$  en  $\Omega_2^{(0)}(z)$ : voor (15.9a) en (15.10a) kunnen we dan in goede benadering nemen:

$$\Omega_1^{(0)}(z): \Gamma_1 + \Gamma_{12} : \Phi_1^{(0)} = -U \quad (15.9d)$$

$$\Omega_2^{(0)}(z): \begin{cases} \Gamma_1 : \Phi_2^{(0)} = -U \\ \Gamma_{12} : \Phi_2^{(0)} + U - \lambda_2 (\psi_2^{(0)} + V) = 0 \end{cases} \quad (15.10d)$$

Hieruit volgt:

1°. voor het diepe gebied  $G_1$  gedraagt de grenslijn  $\Gamma_{12}$  zich in nulde benadering als een kust (vgl. (13.9)).







$$\Phi_2^{(0)} = 0 \text{ langs } \Gamma_2 \quad (16.5)$$

$$\Phi_2^{(0)} - \lambda_2' \psi_2^{(0)} = -\lambda_2' A_1 x \text{ langs } \Gamma_{12} \quad (16.6)$$

Uit (16.4) volgt, dat als  $\varepsilon$  klein is,

$$\Omega_2(z) \approx \Omega_2^{(0)}(z) \quad (16.7)$$

een zeer goede benadering is.

In TW 24 wordt in § 5. een beschouwing gegeven over het oplossen van een randwaardeprobleem van het type (16.5) en (16.6) in een willekeurig gebied, terwijl in § 6. daaruit de oplossing in het hier optredende geval wordt afgeleid. We vermelden hier alleen de uitkomst van deze berekeningen.

Met het oog op het in § 17 te beschouwen probleem formuleren we deze echter iets algemener: als we in plaats van (16.6) langs  $\Gamma_{12}$  de randvoorwaarde

$$\Phi_2^{(0)} - \lambda_2' \psi_2^{(0)} = \lambda_2' V(x, 0) \quad (16.6a)$$

hebben (op grond van (16.1) valt (16.6) onder dit geval met  $V(x, 0) = -A_1 x$ ), dan geldt

$$\Omega_2^{(0)}(z) = -i \cos \pi \chi \cdot (f(z)+1)^{\frac{1}{2}-\chi} (f(z)-1)^{\frac{1}{2}+\chi}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1+f(t))^{-\frac{1}{2}+\chi} (1-f(t))^{-\frac{1}{2}-\chi}}{f(t)-f(z)} \cdot f'(t) V(t, 0) dt, \quad (16.8)$$

$$\text{waarin } f(z) = -\operatorname{sn}(Kz) \quad (16.9)$$

$$\text{en } \chi \text{ bepaald is door } \operatorname{ctg} \pi \chi = \lambda_2', \quad 0 < \chi < \frac{1}{2}. \quad (16.10)$$

In deze formules is verder

$\operatorname{sn} \dots$  een der elliptische functies van Jacobi met modulus  $k$   
 $K(k)$  de volledige elliptische integraal van de eerste soort.

De modulus  $k$  wordt bepaald door

$$\frac{K(\sqrt{1-k^2})}{K(k)} = a. \quad (16.11)$$

De functie  $w = f(z)$  is zo bepaald dat door deze functie het gebied  $G_2$  afgebeeld wordt op het halve vlak  $\operatorname{Im} w > 0$ .

Beschouwen we nu speciaal het geval  $a = 4$  (zoals ook in 10. gedaan is) dan volgt uit (16.11) dat  $k$  zeer klein is, nl.  $0,747 \cdot 10^{-2}$ .



De elliptische functies zijn dus vrijwel ontaard.

Wanneer we ons verder beperken tot de waarden van  $\Omega^{(0)}_2(z)$  in de buurt van de "Zuidkust" CDE dan vinden we, dat hier in zeer goede benadering geldt

$$\Omega(z) \approx -\frac{1}{2} \cos \pi \chi \int_0^1 \left[ \left( \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} t \right)^{-2\chi} V(-1+t, 0) + \left( \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} t \right)^{2\chi} V(1-t, 0) \right] dt \quad (16.12)$$

$\Omega(z)$  is hier dus practisch constant.

Met  $V(t, 0) = -A_1 t$  vinden we dus

$$\Omega(z) \approx -i A_1 I_1(\chi), \quad (16.13)$$

waarin

$$I_1(\chi) = \frac{1}{2} \cos \pi \chi \int_0^1 \left[ \left( \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} t \right)^{-2\chi} - \left( \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} t \right)^{2\chi} \right] (1-t) dt. \quad (16.14)$$

Volgens (16.7) vinden we dus als resultaat voor het probleem van een homogeen windveld boven de oceaan met rechthoekige zee, dat in goede benadering in de omgeving van de zuidkust van de zee geldt:

$$\Omega_2(z) \approx -i A_1 I_1(\chi) \quad (16.15)$$

Hieruit volgt volgens (13.8) en (16.1) voor het windeffect in de buurt van de zuidkust:

$$\zeta(x, y) \approx \lambda_2 (A_1 x + A_2 y + A_1 I_1(\chi)),$$

of, wanneer we  $W_1$  en  $W_2$  invoeren m.b.v. (4.2):

$$\zeta(x, y) = \frac{W_1}{\rho g H_2} (x + I_1(\chi)) + \frac{W_2 y}{\rho g H_2}, \quad (16.16)$$

waarin  $I_1(\chi)$  volgens (16.10) en (16.14) wordt bepaald door

$$\lambda_2' = \frac{\lambda_2^1}{1-\varepsilon} = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Door de Rekenafdeling van het Mathematisch Centrum is  $I_1(\chi)$  voor enige waarden van  $\chi$  berekend, met het volgende resultaat:

$\chi = 0.5$	$\lambda_2' = \operatorname{ctg} \pi \chi = 0$	$I_1(\chi) = 1$
0.48	0.063	0.947
0.46	0.126	0.895
0.44	0.191	0.845
0.42	0.257	0.797

$I_1(\chi)$  is blijkbaar niet zeer gevoelig voor veranderingen in  $\lambda_2'$ .



Als voorbeeld nemen we:

$$H_1 = 1000 \text{ m. (diepte van de oceaan)}$$

$$H_2 = 65 \text{ m. (harmonisch gemiddelde diepte van de Noordzee)}$$

$$D = 150 \text{ m. (vgl. Schalkwijk [4], p.21)}$$

en vinden dan:  $\lambda_1 = 0,012$ ,  $\lambda_2 = 0,184$ ,  $\varepsilon = 0,065$ ,  $\lambda'_2 = 0,197$ ,  
 $\gamma = 0,44$ , verder:  $I_1(\gamma) = 0,84$ .

We voeren een schaalfactor  $\frac{1}{2}L$  in en krijgen dus:

$$\zeta(x,y) = \frac{W_1 L}{2 \rho g H_2} (x + 0,84) + \frac{W_2 L y}{2 \rho g H_2} \quad (16.17)$$

In het punt  $x = 0$ ,  $y = -4$  (dat Schalkwijk aanduidt met "Hoek van Holland") is dus:

$$\zeta = \frac{L}{2 \rho g H_2} (0,84 W_1 - 4 W_2) \quad (16.18)$$

Stellen we hierin nog  $W_1 = W \sin \psi$ ,  $W_2 = -W \cos \psi$ , ( $\psi$  is dus 0 wanneer de wind loodrecht op de zuidkust is gericht) dan kunnen we voor (16.17) ook schrijven:

$$\zeta = 4,1 \cdot \frac{WL}{2 \rho g H_2} \cdot \cos (\psi - 12^\circ). \quad (16.19)$$

We kunnen (16.18) vergelijken met (10.13) (waaraan dan ook de factor  $\frac{1}{2} L$  nog moet worden toegevoegd) en zien, dat het verschil bestaat uit de term  $0,84 \frac{W_1 L}{2 \rho g H_2}$ . Nu we de diepten in oceaan en zee verschillend hebben genomen, is het windeffect ook afhankelijk van de windcomponent evenwijdig aan de zuidkust van de baai.

Voorts kunnen we (16.18) en (16.19) vergelijken met het resultaat, dat Schalkwijk afleidt voor het geval, dat de zee een uniform hellende bodem heeft. Zijn afleiding is niet geheel duidelijk, maar wanneer we zijn uitkomst herleiden op (16.19), (bij Schalkwijk is  $H_0 = 40 \text{ m.}$  en in (16.18) is  $H_2 = 65 \text{ m.}$ ), luidt deze:

$$\zeta = \frac{L}{2 \rho g H_2} (1,1 W_1 - 4,3 W_2) = 4,4 \frac{WL}{2 \rho g H_2} \cos (\psi - 14^\circ).$$

Zodat, hoewel volkomen verschillende berekeningsmethoden zijn gebruikt, een grote overeenkomst in het resultaat bestaat.



17. Lineair variërend windveld boven een rechthoekige zee, grenzend aan een diepe oceaan.

We beschouwen weer hetzelfde gebied  $G$  als in de vorige paragraaf, doch nemen aan dat de componenten van het windveld boven de zee, die we in het vervolg  $W_x$  en  $W_y$  zullen noemen, lineaire functies van  $x$  en  $y$  zijn:

$$\begin{aligned} W_x &= W_1 + W_{11} x + W_{12} (y+2) \\ W_y &= W_2 + W_{21} x + W_{22} (y+2) \end{aligned} \quad (17.1)$$

De windcomponenten boven het midden van de zee ( $x=0$ ,  $y=-2$ ) zijn dus  $W_1$ , resp.  $W_2$  en dit zijn ook de gemiddelde waarden van  $W_x$ , resp.  $W_y$ .

Bepaald wordt nu het door dit windveld veroorzaakte windeffect langs de "zuidkust" van de zee, waarbij we aannemen dat de verhouding van de diepten van zee en oceaan zo klein is, dat we kunnen volstaan met de bepaling van de benadering  $\Omega_2^{(0)}(z)$  voor de complexe potentiaal in het gebied  $G_2$ .

Volgens (15.10a) gelden hiervoor de randvoorwaarden

$$\Phi_2^{(0)} = -U \quad \text{langs } \Gamma_2 \quad (17.2)$$

$$\Phi_2^{(0)} - \lambda_2' \Psi_2^{(0)} = -U + \lambda_2' V \quad \text{langs } \Gamma_{12} \quad (17.3)$$

We bepalen nu de windpotentialen  $U$  en  $V$ , behorende bij het windveld (17.1), zodanig dat zowel langs  $\Gamma_2$  als langs  $\Gamma_{12}$  geldt  $U=0$ . (17.4)

Dan gaan (17.2) en (17.3) over in de voorwaarden (16.5) resp. (16.6a) en we kunnen dan voor de berekening van  $\Omega_2^{(0)}(z)$  in de buurt van de "Zuidkust" de formule (16.12) gebruiken.

$$\text{Stellen we } A_1 = \frac{4\pi}{\rho g D} W_1, \quad A_2 = \frac{4\pi}{\rho g D} W_2, \quad A_{11} = \frac{4\pi}{\rho g D} W_{11}, \text{ enz.}$$

dan moeten volgens (2.5) en (2.6) de windpotentialen  $U$  en  $V$  voldoen aan

$$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = -A_1 - A_{11}x - A_{12}(y+2) \quad (17.4)$$

$$-\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = -A_2 - A_{12}x - A_{22}(y+2) \quad (17.5)$$

Hieraan wordt, zoals direct te verifiëren is, voldaan door

$$U(x,y) = -\frac{1}{2} (A_{21} - A_{12})(1-x^2) + U_0(x,y) \quad (17.6)$$

$$\begin{aligned} V(x,y) = & - (A_1 + 2A_{12})x - (A_2 + 2A_{22})y - \frac{1}{2} A_{11}x^2 - A_{12}xy - \frac{1}{2} A_{22}y^2 + \\ & + V_0(x,y) \end{aligned} \quad (17.7)$$



mits  $U_0$  en  $V_0$  voldoen aan

$$\frac{\partial U_0}{\partial x} = \frac{\partial V_0}{\partial y}, \quad \frac{\partial U_0}{\partial y} = -\frac{\partial V_0}{\partial x} \quad (17.8)$$

Uit (17.8) volgt dat  $U_0$  en  $V_0$  aan de differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann voldoen, dus dat  $\Lambda(z) = U_0(x,y) + i V_0(x,y)$  een analytische functie van  $z = x+iy$  is. Deze functie moeten we zo bepalen, dat  $U(x,y)$  aan de eis (17.4) voldoet.

Uit (17.6) volgt dat dan langs de lijnen BC en EF uit de figuur in § 16 moet gelden

$$U_0(\pm 1, y) = 0 \quad (-4 \leq y \leq 0)$$

terwijl langs de lijnen BAF, resp. CDE moet gelden

$$U_0(x, 0) = U_0(x, -4) = \frac{1}{2} (A_{21} - A_{12}) (1 - x^2). \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

In TW 24 wordt in § 7 met behulp van een Fourier-ontwikkeling aangetoond dat aan deze eisen voldaan wordt, als we nemen

$$U_0(x, y) = \frac{2(A_{21} - A_{12})}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^3} \cdot \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\pi x \cdot \operatorname{ch}(n+\frac{1}{2})\pi(y+2)}{\operatorname{ch}(2n+1)\pi} \quad (17.9)$$

$$V_0(x, y) = -\frac{2(A_{21} - A_{12})}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^3} \cdot \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi x \cdot \operatorname{sh}(n+\frac{1}{2})\pi(y+2)}{\operatorname{sh}(2n+1)\pi} \quad (17.10)$$

Uit (17.7) en (17.10) volgt dan dat voor  $y=0$ , resp.  $y=-4$  geldt

$$V(x, 0) = -(A_1 + 2 A_{12})x - \frac{1}{2} A_{11} x^2 - (A_{21} - A_{12})\varphi(x), \quad (17.11)$$

$$V(x, -4) = -(A_1 - 2 A_{12})x + 4 A_2 - \frac{1}{2} A_{11} x^2 + (A_{21} - A_{12})\varphi(x), \quad (17.12)$$

waarin

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^3} \operatorname{tgh}(2n+1)\pi \cdot \sin(n+\frac{1}{2})\pi x \quad (17.13)$$

De functie  $\varphi(x)$  kan op eenvoudige wijze numeriek bepaald worden.

Uit (16.12) en (17.11) volgt nu dat in de omgeving van de "Zuidkust" geldt

$$\Omega_2^{(0)}(z) \approx -i \left[ (A_1 + 2 A_{12}) I_1(\chi) - \frac{1}{2} A_{11} I_2(\chi) + (A_{21} - A_{12}) I_3(\chi) \right] \quad (17.14)$$

waarin  $I_1(\chi)$  door (16.14) en  $I_2(\chi)$ , resp.  $I_3(\chi)$  door

$$I_2(\chi) = \frac{1}{2} \cos \pi \chi \int_0^1 \left[ \left( \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} t \right)^{-2\chi} + \left( \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} t \right)^{2\chi} \right] (1-t)^2 dt$$

$$I_3(\chi) = \frac{1}{2} \cos \pi \chi \int_0^1 \left[ \left( \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} t \right)^{-2\chi} - \left( \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} t \right)^{2\chi} \right] \varphi(1-t) dt$$



gegeven zijn. De grootheid  $\chi$  is weer bepaald door  $\text{ctg } \pi \chi = \lambda_2'$ ,  $0 < \chi < \frac{1}{2}$ .

Door de Rekenafdeling van het Mathematisch Centrum is de functie  $\varphi(x)$  getabelleerd en zijn de integralen  $I_2(\chi)$  en  $I_3(\chi)$  berekend voor  $\chi = 0,44$  (vgl. pag.32).

Gevonden werd

$x = 0$	$\varphi(x) = 0$	$x = 0,6$	$\varphi(x) = 0,407$
0,1	0,074	0,7	0,457
0,2	0,147	0,8	0,497
0,3	0,218	0,9	0,526
0,4	0,286	1	0,541
0,5	0,349		

en  $I_2(0,44) = 0,819$ ,  $I_3(0,44) = 0,472$ .

Hiermee vinden we

$$\Omega_2(z) \sim -1 \left[ 0,84 (A_1 + 2A_{12}) - 0,41 A_{11} + 0,47 (A_{21} - A_{12}) \right],$$

geldig in het "Zuidelijke" deel van de zee.

Met behulp van (13.8), (17.4) en (17.12) volgt hieruit dat langs de Zuidkust geldt (wanneer ook nog de schaalfactor  $\frac{1}{2} L$  wordt toegevoegd)

$$\begin{aligned} \zeta(x, -4) = \frac{L}{2 \rho g H_2} & \left[ (0,84 + x) W_1 - 4 W_2 - (0,41 - \frac{1}{2} x^2) W_{11} + \right. \\ & \left. + (1,21) - 2x + \varphi(x) \right) W_{12} + (0,47 - \varphi(x)) W_{21} \right] \end{aligned} \quad (17.15)$$

Speciaal vinden we voor  $x = 0$  ("Hoek van Holland")

$$\zeta = \frac{L}{2 \rho g H_2} \left[ -4 W_2 + 0,84 (W_1 + 2W_{12}) - 0,41 W_{11} + 0,47 (W_{21} - W_{12}) \right] \quad (17.16)$$

In deze formule hebben alle termen een min of meer aanschouwelijke betekenis.

De term  $-4 W_2$  is de belangrijkste, afkomstig van de gemiddelde windcomponent in de y-richting. Het valt op dat er geen term met  $W_{22}$  voorkomt - voor de opwaaiing tengevolge van de winden in de y-richting is de variatie van de windsterkte in de y-richting niet van belang.

De termen  $0,84 (W_1 + 2W_{12}) - 0,41 W_{11}$  zijn een gevolg van winden in de x-richting in de omgeving van de grens met de oceaan (voor  $y = 2$  geldt  $W_x = W_1 + 2 W_{12} + W_{11} x$ ). Vergelijk ook de formule (16.17), waarin een term  $0,84 W_1$  voorkomt. Thans blijkt dat speciaal de x-component in de omgeving van de oceaandrond de extra-term ver-



oorzaakt, niet bv. de gemiddelde windsterkte in de x-richting ( $W_1$ ). De term  $-0,41 W_1$  treedt op omdat  $W_x$  langs de oceaانrand nog van x afhangt.

De term  $0,47(W_{21}-W_{12})$  tenslotte is een gevolg van de rotatie van het windveld ( $\text{rot } \vec{W} = W_{21}-W_{12}$ ). Bij positieve rotatie wordt een extra opwaaiing veroorzaakt.

Bij de beschouwing van de windvelden die optreden bij ernstige N.W. stormen, vallen twee bijzonderheden vaak op:

a) In het algemeen is de windsterkte in het Westelijk deel van de Noordzee veel groter dan in het Oostelijk deel (waar zich ongeveer de kern van de depressie bevindt). Dit betekent dat de grootte  $W_{21}$  een vrij grote positieve waarde kan hebben (de component  $W_y$  is negatief maar neemt met toenemende x toe (in algebraïsche zin)).

b) Vaak gebeurt het dat de x-component van het windveld in de Noordelijke helft van de Noordzee praktisch nul is, doch een positieve waarde heeft in het Zuidelijke deel van de Noordzee. Dit betekent dat  $W_1 + 2 W_{12}$  praktisch nul is, doch dat  $W_{12}$  negatief is ( $W_x$  neemt bij afnemende y toe).

Het is duidelijk dat beide effecten volgens (17.16) een vergroterende invloed hebben op de waarde van  $\zeta$  in het punt "Hoek van Holland".

Als voorbeeld beschouwen we eerst het windveld  $W_x = 0$ ,  $W_y = -W + Wx$ . De wind is dus overal langs de as gericht doch de sterkte is nul langs de oostkust en langs de westkust is de sterkte het dubbele van de gemiddelde waarde W.

Uit (7.14) vinden we dan, met  $W_1=W_{11}=W_{12}=0$ ;  $W_2=-W$ ,  $W_{21}=W$ ,  $W_{22}=0$

$$\zeta = \frac{LW}{2\rho g H_2} [4 + 0,47]$$

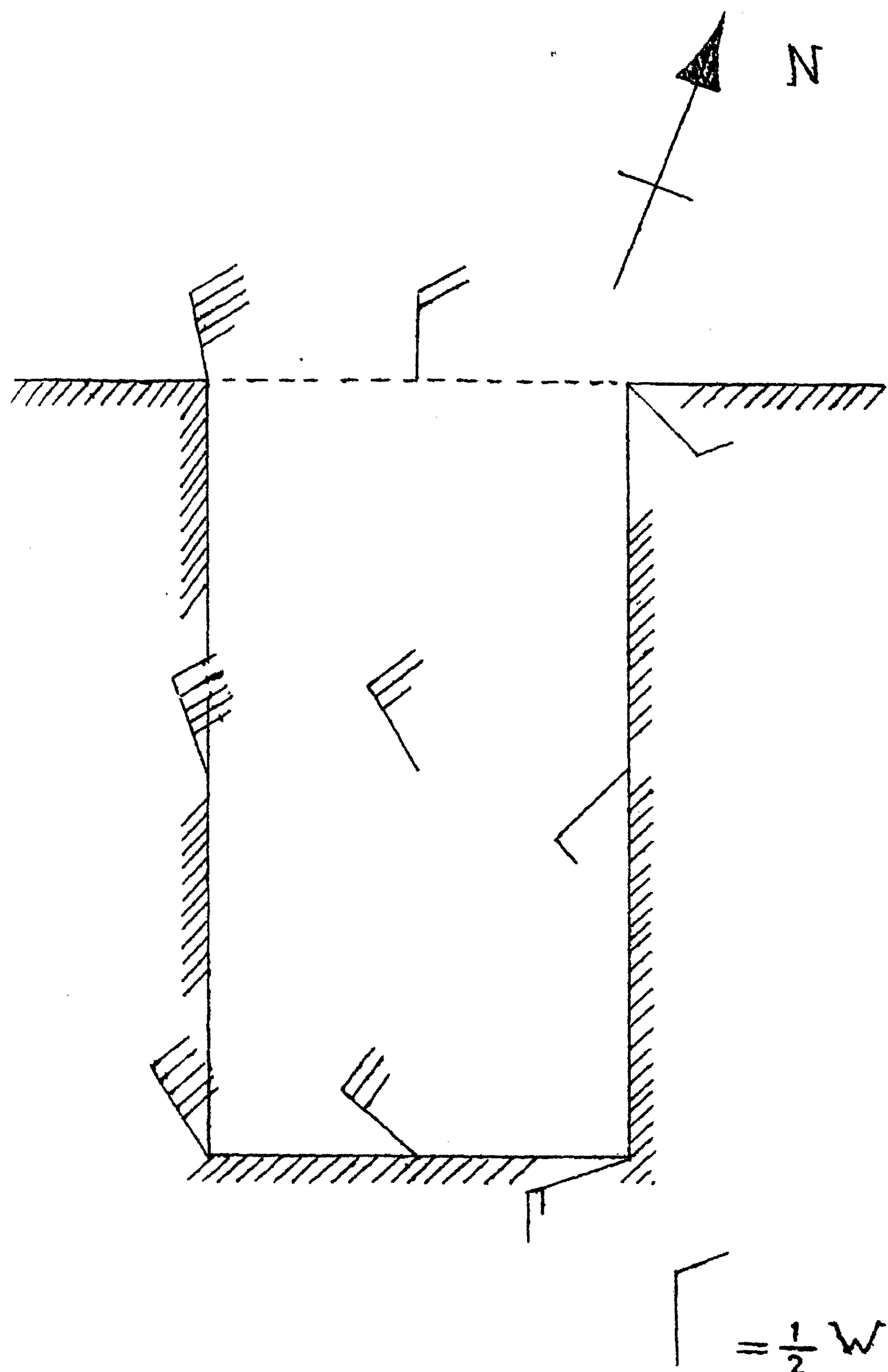
dus, vergeleken bij wat we volgens (16.18) (voor "Hoek van Holland") zouden vinden voor het gemiddelde windveld een verhoging van 12%.

Als tweede voorbeeld beschouwen we het windveld

$$W_x = \frac{1}{2} W - \frac{1}{4} Wx - \frac{1}{4} W(y+2)$$

$$W_y = -W + \frac{5}{4} Wx .$$





In de figuur is een schets van dit windveld gegeven (N.b. we beschouwen steeds windkrachten en geen windsterkten, in de figuur is dan ook de grootte van de windkracht - die ruwweg evenredig is met het kwadraat van de windsterkte - aangegeven).

We vinden uit (17.16)

$$\zeta = \frac{L}{2\rho gH_2} [4 + 0,10 + 0,71],$$

terwijl we, als we met het gemiddelde windveld zouden rekenen, volgens (16.18)

$$\zeta = \frac{L}{2\rho gH_2} [4 + 0,42]$$

zouden krijgen. Het extra-effect is hier dus 9%.

#### Literatuur:

- [1.] G.W. Veltkamp - Een probleem in conforme afbeelding. Rapport TW 22 van het Mathematisch Centrum 1953.
- [2.] G.W. Veltkamp - Stationaire windvelden boven een zee van constante diepte. Rapport TW 23, 1953.
- [3.] G.W. Veltkamp - Stationaire windvelden boven een zee van op delen constante diepte. Rapport TW 24, 1954.
- [4.] W.F. Schalkwijk - A contribution to the study of storm surges on the dutch coast, 's-Gravenhage, 1947.